

SKRIPSI

**REPRESENTASI GRUP DIHEDRAL
DAN GRUP QUATERNION TERGENERALISASI
PADA GRAF ORDER ELEMEN**



CLARISSA ELVA DHEANA

20106010019

**STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2024

**REPRESENTASI GRUP DIHEDRAL
DAN GRUP QUATERNION TERGENERALISASI
PADA GRAF ORDER ELEMEN**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



UIN

diajukan oleh

CLARISSA ELVA DHEANA

20106010019

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2024



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Clarissa Elva Dheana
NIM : 20106010019
Judul Skripsi : Representasi Grup Dihedral dan Grup Quaternion Tergeneralisasi pada Graf Order Elemen

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Yogyakarta, 27 Februari 2024

Pembimbing I

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

NIP. 19660731 200003 2 001

Pembimbing II

Arif Munandar, M.Sc.

NIP. 19920721 201903 1 013



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-433/Un.02/DST/PP.00.9/03/2024

Tugas Akhir dengan judul : Representasi Grup Dihedral dan Grup Quaternion Tergeneralisasi pada Graf Order Elemen

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : CLARISSA ELVA DHEANA
Nomor Induk Mahasiswa : 20106010019
Telah diujikan pada : Jumat, 08 Maret 2024
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 65f2ab91570d8



Penguji I

Arif Munandar, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 65f26783c9785



Penguji II

Sri Istiyarti Uswatun Chasanah, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 65f14a291ad10



Yogyakarta, 08 Maret 2024
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 65f2ab9153284

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Clarissa Elva Dheana

NIM : 20106010019

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 27 Februari 2024



Clarissa Elva Dheana

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



Penulis mempersembahkan karya sederhana ini kepada
Almamater UIN Sunan Kalijaga, keluarga tercinta,
serta diri sendiri yang telah berjuang dan bertahan
hingga sampai di titik ini.

HALAMAN MOTTO



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

﴿ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴾

"Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan".

(Q.S. Al-Insyirah: 6)

"Hatiku tenang karena mengetahui bahwa apa yang melewatkanmu tidak akan pernah menjadi takdirku dan apa yang ditakdirkan untukku tidak akan pernah melewatkanmu".

(Umar bin Khattab)

PRAKATA

Alhamdulillah rabbi' alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Representasi Grup Dihedral dan Grup Quaternion Tergeneralisasi pada Graf Order Elemen". Skripsi ini ditulis dalam rangka memenuhi sebagian persyaratan guna mendapatkan gelar Sarjana Matematika di Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun, berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *Alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta sekaligus dosen pembimbing skripsi yang telah memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
2. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Aulia Khifah Futhona, M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
4. Arif Munandar, M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.

5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.
6. Tentunya dua orang paling berjasa dalam hidup penulis, Bapak Triyono dan Ibu Winangsis Sri Suprapti yang menjadi kekuatan terbesar bagi penulis. Terima kasih telah memberikan segenap cinta dan kasih sayang, doa yang tak pernah putus, memotivasi, dan memberi dukungan materi maupun non-materi.
7. Keluarga besar penulis, khususnya kepada adik Elsa Cahyaning Soraya yang telah memberikan semangat dan mewarnai kehidupan penulis.
8. Keluarga besar mahasiswa Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga, khususnya Matematika angkatan 2020 yang telah berproses mengembangkan diri bersama selama masa kuliah.
9. Teman-teman konsentrasi Aljabar angkatan 2019 dan 2020 yang telah banyak membantu dan memotivasi penulis selama masa perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
10. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 25 Februari 2024

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iv
HALAMAN MOTTO	v
PRAKATA	vi
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMBANG	xiv
INTISARI	xv
ABSTRACT	xvi
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	3
1.3. Rumusan Masalah	4
1.4. Tujuan Penelitian	4
1.5. Manfaat Penelitian	5
1.6. Tinjauan Pustaka	5
1.7. Metode Penelitian	8
1.8. Sistematika Penulisan	9
II DASAR TEORI	10

2.1. Teori Bilangan	10
2.1.1. Keterbagian	10
2.1.2. Faktor Persekutuan Terbesar	11
2.1.3. Sifat Bilangan Prima	13
2.2. Grup	14
2.2.1. Grup Hingga dan Subgrup	15
2.2.2. Grup Komutatif dan Grup Non Komutatif	18
2.2.3. Koset dan Teorema Lagrange	21
2.3. Graf	24
2.3.1. <i>Adjacent</i> dan Insiden	27
2.3.2. Keterhubungan	29
2.3.3. Jenis-Jenis Graf	32
2.3.4. Graf Bipartit dan Graf Pohon	34
2.3.5. Graf Euler dan Graf Hamilton	36
2.3.6. Graf Planar	39
III REPRESENTASI GRUP PADA GRAF ORDER ELEMEN	43
3.1. Konsep Dasar Graf Order Elemen	43
3.2. Grup Dihedral dan Grup Quaternion Tergeneralisasi	49
3.2.1. Grup Dihedral	50
3.2.2. Grup Quaternion Tergeneralisasi	53
3.3. Representasi Grup Dihedral dan Grup Quaternion Tergeneralisasi pada Graf Order Elemen	56
3.3.1. Graf Order Elemen Grup Dihedral	57
3.3.2. Graf Order Elemen Grup Quaternion Tergeneralisasi	65
IV PENUTUP	71
4.1. Kesimpulan	71

4.2. Saran	73
DAFTAR PUSTAKA	73
Curriculum Vitae	75



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR TABEL

1.1 Perbedaan dan Persamaan Penelitian	6
2.1 Derajat Setiap Vertek pada Graf G	29



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR GAMBAR

1.1 Skema Metode Penelitian	9
2.1 Graf G	25
2.2 Subgraf dan Bukan Subgraf dari Graf G	26
2.3 Komplemen Graf	27
2.4 Graf G untuk Menunjukkan <i>Adjacent</i> dan Insiden	28
2.5 Graf G untuk Menunjukkan Derajat Vertek	29
2.6 Graf G untuk Menunjukkan Walk	30
2.7 Graf Terhubung dan Tidak Terhubung	31
2.8 Komponen Penyusun Graf H	32
2.9 Graf Reguler	32
2.10 Graf Kosong	33
2.11 Graf Komplit	33
2.12 Graf Cycle	33
2.13 Graf Bipartit	34
2.14 Graf Bipartit Komplit	35
2.15 Graf Bintang	35
2.16 Graf Bintang dan Bukan Graf Bintang	36
2.17 Graf Euler	37
2.18 Graf Hamilton	38
2.19 Graf G untuk Menunjukkan Planaritas	40
2.20 Graf Planar G	40
2.21 Graf $K_{3,3}$	42

2.22 Graf K_5	42
3.1 Graf Order Elemen $G = (\mathbb{Z}_7, +)$	44
3.2 Graf Order Elemen $(\mathbb{Z}_8, +)$	46
3.3 Graf Order Elemen $(\mathbb{Z}_{10}, +)$	48
3.4 Komplemen Graf Order Elemen $(\mathbb{Z}_{10}, +)$	48
3.5 Graf Order Elemen D_6	58
3.6 Komplemen Graf Order Elemen D_6	59
3.7 Graf Order Elemen D_8	63
3.8 Graf Order Elemen Q_8	66
3.9 Graf Order Elemen Q_{12}	69

DAFTAR LAMBANG

$x \in A$:	x anggota A
$A \subseteq X$:	A himpunan bagian (<i>subset</i>) atau sama dengan X
\mathbb{N}	:	himpunan semua bilangan asli
\mathbb{Z}	:	himpunan semua bilangan bulat
\mathbb{Z}^+	:	himpunan semua bilangan bulat positif
\mathbb{R}	:	himpunan semua bilangan real
■	:	akhir suatu bukti



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

INTISARI

REPRESENTASI GRUP DIHEDRAL DAN GRUP QUATERNION TERGENERALISASI PADA GRAF ORDER ELEMEN

Oleh

CLARISSA ELVA DHEANA

20106010019

Graf order elemen merupakan representasi grup berhingga pada graf dengan memandang anggota dari grup sebagai vertek dari graf dan dua vertek berbeda misal g dan h akan *adjacent* jika order g habis membagi order h atau sebaliknya. Hasil penelitian terdahulu yang berkaitan dengan karakterisasi graf order elemen grup siklik dengan order $n = p$, $n = p^k$, dan $n = 2p$ meliputi graf komplit, graf pohon, graf Euler, dan graf Hamilton. Penelitian ini berfokus pada grup dihedral D_{2n} dengan $n = p$, $n = 3^k$, dan $n = 2^k$ serta grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} dengan $n = 2^k$ dan $n = t$ dimana p bilangan prima, k bilangan bulat positif, dan t bilangan ganjil. Dengan memperumum contoh-contoh yang ditemukan oleh penulis, dilakukan karakterisasi graf order elemen yang terbentuk dari kedua grup tersebut. Adapun karakterisasi yang dihasilkan meliputi graf komplit, graf bipartit, graf planar, graf Euler, dan graf Hamilton.

Kata kunci : graf order elemen, grup dihedral, grup quaternion tergeneralisasi.

ABSTRACT

REPRESENTATION DIHEDRAL GROUP AND GENERALIZED QUATERNION GROUP ON ORDER ELEMENT GRAPH

By

CLARISSA ELVA DHEANA

20106010019

Order element graph is a representation of a finite group on a graph whose vertex is the element of the group and two distinct vertices e.g. g and h will be *adjacent* if the order of g divide the order of h or instead. Results of previous research related to the characterization of order element graph of cyclic group with order $n = p$, $n = p^k$, and $n = 2p$ include complete graph, tree graph, Euler graph, and Hamilton graph. This research focuses on the dihedral group D_{2n} with $n = p$, $n = 3^k$, and $n = 2^k$ and the generalized quaternion group Q_{4n} with $n = 2^k$ and $n = t$, where p is a prime number, k is a positive integer, and t is an odd number. By generalizing the examples found by the author, the order element graph formed from the two groups are characterized. The resulting characterizations include complete graph, bipartite graph, planar graph, Eulerian graph, and Hamiltonian graph.

Keyword : order element graph, dihedral group, generalized quaternion group.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Representasi grup pada graf merupakan topik yang saat ini sedang banyak diteliti. Topik ini menghubungkan dua bidang ilmu Matematika, yakni Teori Graf dan Teori Grup. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut sehingga melalui teori tersebut objek diskrit dan hubungannya dapat divisualisasikan. Seperti yang diketahui, grup merupakan teori abstrak sehingga representasi grup pada graf dapat menjadi cara lain dalam memandang grup agar lebih divisualisasikan. Representasi grup pada graf umumnya melihat elemen pada grup sebagai vertek dan hubungan antara elemen-elemen tersebut dinyatakan sebagai *edge*.

Artur Cayley pada tahun 1878 pertama kali memperkenalkan hubungan antara teori grup berhingga dengan graf. Artur Cayley dalam penelitiannya, merepresentasikan grup berhingga G dan $A \subset G$ pada graf dengan memandang elemen-elemen dari grup G sebagai vertek, serta vertek g dan h pada grup G akan *adjacent* jika dan hanya jika untuk suatu $a \in A$ memenuhi $g = ah$. Graf yang dihasilkan dari penelitiannya tentang representasi grup pada graf dikenal dengan sebutan Graf Cayley (Munandar2022a).

Seiring berjalannya waktu, penelitian mengenai representasi grup pada graf telah banyak dilakukan. Representasi grup pada graf yang banyak dikenal selanjutnya adalah Power Graf yang dikenalkan oleh Kelarev dan Quinn (2002). Pe-

nulis mendefinisikan Power Graf sebagai suatu graf dengan verteknya merupakan elemen-elemen dalam semigrup G , serta vertek g dan h akan *adjacent* jika terdapat bilangan asli n sedemikian sehingga $g = h^n$.

Al-Hasanat (2019) juga meneliti tentang representasi grup pada graf. Penulis mendefinisikan Order Graf sebagai suatu graf dengan verteknya merupakan order elemen grup dan kedua vertek berbeda misalkan g dan h akan *adjacent* jika dan hanya jika order g habis membagi order h . Pada penelitiannya berfokus pada grup dihedral dengan order 2^n dan grup dengan order prima.

Arif Munandar (2022) memperkenalkan Graf Order Elemen yang didefinisikan sebagai suatu graf dengan verteknya merupakan elemen dalam grup, serta vertek g dan h pada grup berhingga G akan *adjacent* jika dan hanya jika order elemen g habis membagi order elemen h atau sebaliknya. Penelitiannya membahas mengenai karakterisasi graf order elemen yang terbentuk dari grup siklik dengan order tertentu. Hasil penelitiannya diperoleh graf order elemen yang terbentuk dari grup siklik dengan order prima merupakan graf komplit yang sekaligus merupakan graf Euler dan graf Hamilton. Sementara graf order elemen yang terbentuk dari grup siklik dengan order p^k dimana p bilangan prima dan k bilangan bulat positif merupakan graf komplit dan graf Hamilton. Namun, dalam hal $p = 2$, graf order elemen yang terbentuk bukan merupakan graf Euler. Hasil komplemen graf order elemen yang terbentuk dari grup siklik dengan order $2p$ untuk suatu bilangan prima p merupakan graf pohon. Artikel yang dibuat Arif Munandar tersebut, sekaligus menjadi rujukan utama penulis dalam pembuatan tugas akhir ini.

Tugas akhir ini memperkenalkan representasi graf order elemen pada grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi. Pembahasan dimulai dengan membahas konsep dasar graf order elemen. Merepresentasikan grup dihedral dan grup

quaternion tergeneralisasi pada graf order elemen membutuhkan hasil order elemen dari setiap elemen pada grup tersebut. Oleh karena itu, pembahasan dilanjutkan dengan membahas tentang grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi yang meliputi definisi dan teorema order elemen kedua grup tersebut. Penelitian ini diakhiri dengan mengkarakterisasi graf order elemen yang terbentuk dari grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi.

1.2. Batasan Masalah

Batasan masalah pada suatu penelitian sangat penting perannya agar obyek yang dikaji mudah dipahami. Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah karakterisasi dari representasi grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi pada graf order elemen yang terbentuk. Batasan masalah pada setiap subbab adalah sebagai berikut:

1. Konsep dasar graf order elemen dibatasi dengan definisi dari graf order elemen dan karakterisasi dari representasi grup siklik pada graf order elemen.
2. Pembahasan grup dihedral dan generalisasi grup quaternion dibatasi hanya definisi dan teorema order elemen grup.
3. Karakterisasi graf order elemen yang dihasilkan dari representasi grup dihedral D_{2n} dibatasi hanya untuk $n = p$, $n = 2^k$, dan $n = 3^k$ dimana p adalah bilangan prima dan k bilangan bulat positif.
4. Karakterisasi graf order elemen yang dihasilkan dari representasi grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} dibatasi hanya untuk $n = 2^k$ dan $n = t$ dimana k bilangan bulat positif dan t bilangan ganjil positif.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, selanjutnya dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep dasar graf order elemen?
2. Bagaimana karakterisasi dari representasi grup dihedral pada graf order elemen yang terbentuk untuk $n = p$, $n = 2^k$, dan $n = 3^k$ dimana p adalah bilangan prima dan k bilangan bulat positif?
3. Bagaimana karakterisasi dari representasi grup quaternion tergeneralisasi pada graf order elemen yang terbentuk untuk $n = 2^k$ dan $n = t$ dimana k bilangan bulat positif dan t bilangan ganjil positif?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari tentang konsep graf order elemen.
2. Mengetahui karakterisasi dari representasi grup dihedral pada graf order elemen yang terbentuk untuk $n = p$, $n = 2^k$, dan $n = 3^k$ dimana p adalah bilangan prima dan k bilangan bulat positif.
3. Mengetahui karakterisasi dari representasi grup quaternion tergeneralisasi pada graf order elemen yang terbentuk untuk $n = 2^k$ dan $n = t$ dimana k bilangan bulat positif dan t bilangan ganjil positif.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman tentang konsep dasar graf order elemen.
2. Memberikan pemahaman tentang karakterisasi dari representasi grup dihedral pada graf order elemen yang terbentuk $n = p$, $n = 2^k$, dan $n = 3^k$ dimana p adalah bilangan prima dan k bilangan bulat positif.
3. Memberikan pemahaman tentang karakterisasi dari representasi grup quaternion tergeneralisasi pada graf order elemen yang terbentuk untuk $n = 2^k$ dan $n = t$ dimana k bilangan bulat positif dan t bilangan ganjil positif.

1.6. Tinjauan Pustaka

Penelitian yang dilakukan oleh Amit Sehgal, dkk. (2020) menghasilkan suatu representasi grup hingga pada graf yang dikenal dengan sebutan *coprime order graph*. Penulis mendefinisikan *coprime order graph* yang dinotasikan $\Theta(G)$ sebagai suatu graf dengan himpunan verteknya merupakan semua elemen dalam grup G dan dua vertek berbeda $x, y \in G$ *adjacent* jika dan hanya jika $FPB(o(x), o(y)) = 1$ atau $FPB(o(x), o(y)) = p$ dimana p adalah bilangan prima. Hasil penelitian ini adalah menemukan derajat vertek pada *coprime order graph* dari grup abelian berhingga dan grup dihedral serta membahas tentang spektrum Laplacian.

Siti Zaidah, dkk. (2021) mendefinisikan graf *coprime* yang dinotasikan Ω_G sebagai suatu graf dengan himpunan verteknya merupakan semua elemen dalam grup G dan dua vertek berbeda $u, v \in G$ akan *adjacent* jika $FPB(o(u), o(v)) = 1$. Hasil penelitiannya adalah mengkarakterisasi graf *coprime* yang terbentuk dari grup

quaternion tergeneralisasi dengan order tertentu. Kemudian, dibahas juga indeks konektivitas dari $\Omega_{Q_{4n}}$.

Shafiq Ur Rehman, dkk. (2018) memperkenalkan *Order Divisor Graphs*. Penelitiannya mendefinisikan *Order Divisor Graphs* yang dinotasikan $OD(G)$ sebagai suatu graf dimana himpunan verteknya adalah semua elemen dalam grup G dan dua vertek berbeda misal a dan b akan *adjacent* jika $o(a) \neq o(b)$ dan memenuhi $o(a)|o(b)$ atau sebaliknya. Hasil dari penelitian ini adalah mengkarakterisasi *Order Divisor Graphs* yang terbentuk dari suatu grup berhingga seperti grup siklik, grup dihedral, dll.

Representasi grup berhingga G pada graf order elemen diperkenalkan pertama kali oleh Arif Munandar (2022). Penelitiannya mendefinisikan graf order elemen sebagai graf $\Gamma(G)$ dengan himpunan vertek merupakan elemen dalam grup G dan dua vertek berbeda misal $a, b \in G$ akan *adjacent* jika $o(a)|o(b)$ atau sebaliknya. Hasil penelitiannya adalah mengkarakterisasi graf order elemen yang terbentuk dari grup siklik dengan order tertentu.

Penelitian mengenai representasi grup hingga pada graf telah banyak dilakukan. Berikut ini adalah perbedaan dan persamaan antara penelitian-penelitian yang sudah dijelaskan di atas dengan penelitian tugas akhir ini.

Tabel 1.1 Perbedaan dan Persamaan Penelitian

No.	Judul	Penulis	Perbedaan	Persamaan
1.	Co-Prime Order Graph Of a Finite Abelian Group and Dihedral Group.	Amit Sehgal, Manjeet, Dalip Singh.	<i>Co-Prime Order Graph</i> tepatnya pada syarat vertek <i>adjacent</i> dan hasil penelitian yang	Grup yang direpresentasikan yakni grup dihedral.

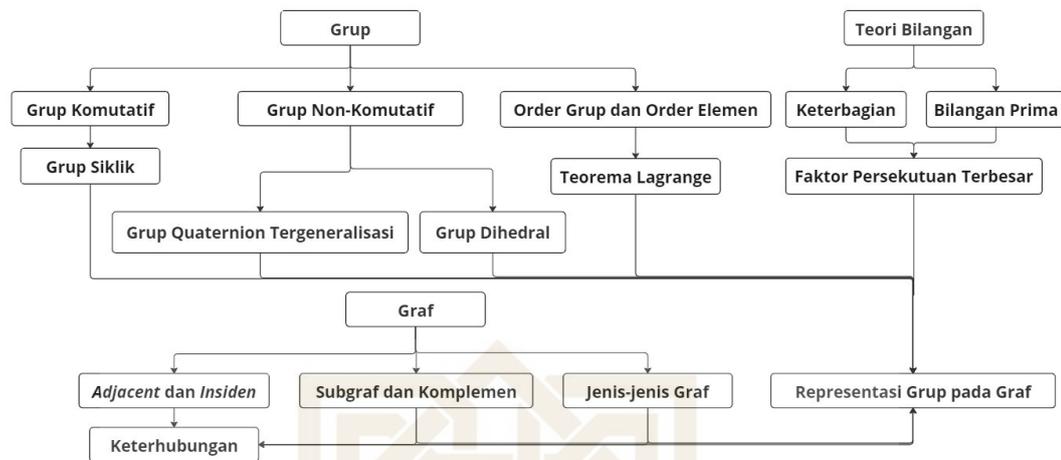
No.	Judul	Penulis	Perbedaan	Persamaan
			membahas mengenai derajat vertek serta spektrum Laplacian.	
2.	Connectivity Indices Of Coprime Graph Of Generalized Quaternion Group.	Siti Zahidah, Dwi Mifta Mahanani, Karine Lutfiah Oktaviana.	<i>Co-Prime Graph</i> tepatnya pada syarat vertek <i>adjacent</i> dan hasil penelitian yang membahas karakterisasi dari $\Omega_{Q_{4n}}$ serta indeks konektivitasnya.	Grup yang direpresentasikan yakni grup quaternion tergeneralisasi.
3.	Order Divisor Graphs of Finite Groups.	S. U. Rehman, A. Q. Baig, M. Imran, Z. U. Khan.	<i>Order Divisor Graphs</i> tepatnya pada syarat vertek <i>adjacent</i> dan hasil penelitian yang membahas karakterisasi dari $OD(G)$.	Grup yang direpresentasikan yakni grup siklik dan grup dihedral.
4.	Graf Order Element: Representasi Baru Grup Berhingga pada Graf.	Arif Munnandar.	Grup yang direpresentasikan yakni grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi.	Graf Order Element.

Tinjauan pustaka yang digunakan sebagai rujukan untuk menulis dasar teori mengenai konsep teori bilangan diambil dari sebuah buku yang ditulis oleh Kenneth H. Rosen (2011). Untuk konsep dasar teori grup diambil dari buku karya Joseph A. Gallian (2017) dan buku karya D. S. Malik, dkk (2007). Kemudian, untuk dasar teori graf diambil dari sebuah buku yang ditulis oleh Arif Munandar (2022). Pembahasan pada penelitian ini mengambil definisi grup dihedral dari buku David S. Dummit dan Richard M. Foote (2004). Sementara itu, definisi grup quaternion tergeneralisasi diambil dari sebuah jurnal karya Yoshinori Yamasaki (2018).

1.7. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku dan jurnal yang terkait dengan topik penelitian yaitu; konsep dasar graf order elemen, grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

1. Membahas konsep dasar dari teori bilangan, teori grup, dan teori graf.
2. Membahas konsep dasar graf order elemen.
3. Membahas grup dihedral dan generalisasi grup quaternion meliputi definisi dan teorema order elemen kedua grup tersebut.
4. Membahas representasi grup dihedral dengan order $n = p$, $n = 2^k$, dan $n = 3^k$ dimana p adalah bilangan prima dan k bilangan bulat positif pada graf order elemen dan mengkaraktisasinya.
5. Membahas representasi grup quaternion tergeneralisasi dengan order $n = 2^k$ dan $n = t$ dimana k bilangan bulat positif dan t bilangan ganjil pada graf order elemen dan mengkaraktisasinya.



Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab, yaitu sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas tentang beberapa konsep dasar dari teori bilangan, grup hingga, dan graf yang mendasari representasi grup hingga pada graf order elemen.
- BAB 3** : Bab ini membahas tentang konsep dasar graf order elemen, sedikit membahas tentang grup dihedral dan generalisasi grup quaternion, serta representasi grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi pada graf order elemen.
- BAB 4** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

PENUTUP

Bab penutup ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Graf order elemen merupakan representasi grup berhingga pada graf dengan memandang anggota dari grup sebagai vertek dari graf dan dua vertek berbeda misal g dan h akan *adjacent* jika order g habis membagi order h atau sebaliknya. Adapun karakterisasi graf order elemen grup siklik adalah sebagai berikut:
 - a. Graf order elemen grup siklik dengan order $n = p$ dimana p bilangan prima membentuk graf komplit yang sekaligus merupakan graf Euler dan graf Hamilton.
 - b. Graf order elemen grup siklik yang dibangun oleh satu elemen dengan order $n = p^k$ dimana p bilangan prima dan k bilangan bulat positif merupakan graf komplit dan graf Hamilton, namun bukan graf Euler jika $p = 2$.
 - c. Komplemen graf order elemen grup siklik dengan order $n = 2p$ dimana p bilangan prima merupakan graf pohon.
2. Karakterisasi graf order elemen grup dihedral D_{2n} adalah sebagai berikut:

- a. Graf order elemen grup dihedral D_{2n} dengan $n = p$ dan $n = 3^k$ dimana p bilangan prima dan k bilangan bulat positif membentuk dua subgraf yang saling *disjoint* dan masing-masing membentuk graf komplit yang sekaligus bukan merupakan graf Hamilton. Sementara komplementnya menghasilkan graf bipartit komplit.
 - b. Graf order elemen grup dihedral D_{2n} dengan $n = 2^k$ dimana k bilangan bulat positif membentuk graf komplit yang sekaligus merupakan graf Hamilton.
 - c. Graf order elemen grup dihedral D_{2n} bukan merupakan graf Euler.
 - d. Graf order elemen grup dihedral D_{2n} merupakan graf planar jika dan hanya jika $n = 3$.
3. Karakterisasi graf order elemen grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} adalah sebagai berikut:
- a. Graf order elemen grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} dengan $n = 2^k$ dimana k bilangan bulat positif membentuk graf komplit yang sekaligus merupakan graf Hamilton.
 - b. Graf order elemen grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} dengan $n = t$ dimana t bilangan ganjil positif merupakan graf Hamilton.
 - c. Graf order elemen grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} bukan merupakan graf Euler.
 - d. Graf order elemen grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} bukan merupakan graf planar.

4.2. Saran

Saran yang akan penulis sampaikan untuk penenelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Pembuktian teorema pada penelitian ini hanya satu arah yakni dari kiri ke kanan. Diharapkan ada penelitian untuk membahas pembuktian teorema sebaliknya yakni dari kanan ke kiri.
2. Penelitian ini merepresentasikan grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi pada graf order elemen. Penulis menyarankan untuk melakukan penelitian dengan mengubah grupnya menjadi grup alternating, simetris, dll.

DAFTAR PUSTAKA

- Aspur, M. (2014). *Kehamiltonan pada graf komplit*. PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
- Dummit, D. S. & Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra*, volume 3. Wiley Hoboken.
- Gallian, J. (2021). *Contemporary abstract algebra*. Chapman and Hall/CRC.
- Malik, D., Mordeson, J. N., & Sen, M. (2007). Mth 581-582: Introduction to abstract algebra. *United States of America*.
- Munandar, A. (2022a). Graf order elemen: representasi baru grup berhingga pada graf. *Jurnal Ilmiah Matematika*.
- Munandar, A. (2022b). *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*. Sleman : Deepublish (CV Budi Utama).
- Munandar, A. (2023). Some properties on coprime graph of generalized quaternion groups. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 17(3):1373–1380.
- Rosen, K. H. (2011). *Elementary number theory*. Pearson Education London.
- Yamasaki, Y. (2018). Ramanujan cayley graphs of the generalized quaternion groups and the hardy–littlewood conjecture. *Mathematical Modelling for Next-Generation Cryptography: CREST Crypto-Math Project*, pages 159–175.