

SKRIPSI

**INDEKS-INDEKS KONEKTIVITAS DARI GRAF KOPRIMA
DARI GRUP QUATERNION TERGENERALISASI**



AULIA TIFFANI RIZKY
20106010027
STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2024

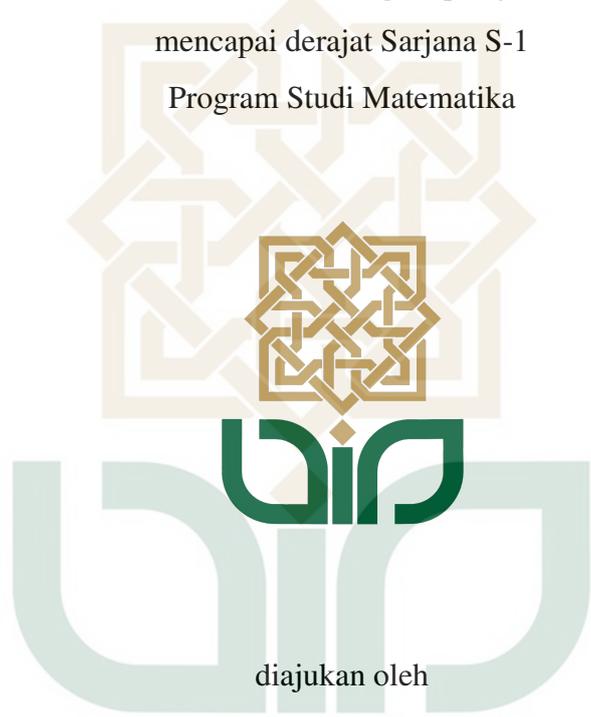
**INDEKS-INDEKS KONEKTIVITAS DARI GRAF KOPRIMA
DARI GRUP QUATERNION TERGENERALISASI**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



diajukan oleh

AULIA TIFFANI RIZKY

20106010027

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2024



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu 'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Aulia Tiffani Rizky

NIM : 20106010027

Judul Skripsi : Indeks-Indeks Konektivitas dari Graf Koprime dari Grup Quaternion
Tergeneralisasi

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu 'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 04 Maret 2024

Pembimbing I

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.

NIP. 19840113 201503 1 001

Pembimbing II

Arif Munandar, M.Sc.

NIP. 19920721 201903 1 013



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-438/Un.02/DST/PP.00.9/03/2024

Tugas Akhir dengan judul : Indeks-Indeks Konektivitas dari Graf Koprime dari Grup Quaternion Tergeneralisasi
yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : AULIA TIFFANI RIZKY
Nomor Induk Mahasiswa : 20106010027
Telah diujikan pada : Jumat, 08 Maret 2024
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang
Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 65f26e538e382



Penguji I
Arif Munandar, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 65f3a7ec5cee0



Penguji II
Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom
SIGNED

Valid ID: 65f12e8783bc8



Yogyakarta, 08 Maret 2024
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 65f3df94d7999

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Aulia Tiffani Rizky

NIM : 20106010027

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 04 Maret 2024



Aulia Tiffani Rizky

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



Karya sederhana ini penulis persembahkan kepada
Almamater UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta dan
Keluarga Tercinta

HALAMAN MOTTO



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA

"Berpikirlah sebelum menentukan suatu ketetapan, atur strategi sebelum menyerang, dan musyawarahkan sebelum melangkah maju ke depan."

Imam Syafi'i

"Ilmu tanpa amal adalah kegilaan dan amal tanpa ilmu adalah kesia-siaan."

Imam Ghazali

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(QS. Al- Baqarah:286)

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil' alamin, puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Indeks-Indeks Konektivitas dari Graf Koprime dari Grup Quaternion Tergeneralisasi". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Arif Munandar, M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
4. M. Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc., dan Arif Munandar, M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.

6. Orang Tua tercinta, Bapak Ismawanto dan Ibu Sri Handayani, S.H. yang selalu mendo'akan dan memotivasi untuk keberhasilan anaknya, serta kedua adik tercinta Raffa Milano Poetro dan Rangga Afrilliano Poetro.
7. Keluarga besar penulis khususnya Mbah Sariyem tercinta dan almarhum Mbah Teguh Riyanto yang selalu mendo'akan dan memberikan semangat.
8. Marchanda R.M., Fina D.S., Sherli R., Rita F., dan Suci Z.P. yang memberikan semangat dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
9. Teman-Teman konsentrasi Aljabar 2019 dan 2020, serta Maulida, Dhiya, Awal, Arditya, Alfiah yang telah berjuang bersama sampai saat ini.
10. Keluarga Besar Mahasiswa Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, khususnya Matematika angkatan 2020 dan Pengurus Harian HM-PS Matematika periode 2021 dan 2022 yang berproses bersama selama kuliah.
11. Teman-Teman KKN 111 Kelompok 46, Ana, Iis, Gilang, Latifa, Najib, Nirma, Nisa, Samudera, dan Mas Wildan yang telah mendukung dan mendo'akan selama pengerjaan tugas akhir ini.
12. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.
Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 05 Maret 2024

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMBANG	xv
INTISARI	xvii
ABSTRACTxviii
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	6
1.3. Rumusan Masalah	6
1.4. Tujuan Penelitian	7
1.5. Manfaat Penelitian	7
1.6. Tinjauan Pustaka	8
1.7. Metode Penelitian	10
1.8. Sistematika Penulisan	11
II DASAR TEORI	12

2.1. Keterbagian	12
2.2. Faktor Persekutuan Terbesar	13
2.3. Saling Prima	14
2.4. Grup	14
2.5. Grup Komutatif dan Grup Non Komutatif	17
2.6. Graf	19
2.6.1. Adjacent dan Insiden	20
2.6.2. Keterhubungan	22
2.6.3. Jenis-Jenis Graf	25
2.7. Indeks Konektivitas	30
2.7.1. Indeks Zagreb Pertama	31
2.7.2. Indeks Zagreb Kedua	32
2.7.3. Indeks Wiener	33
2.7.4. Indeks <i>hyper</i> -Wiener	34
2.7.5. Indeks Harary	35
2.7.6. Indeks Szeged	35
III INDEKS KONEKTIVITAS PADA GRAF KOPRIMA ATAS GRUP QU- ATERNION TERGENERALISASI	38
3.1. Grup Quaternion	38
3.2. Grup Quaternion Tergeneralisasi	38
3.3. Graf Koprime atas Grup Quaternion Tergeneralisasi	41
3.4. Indeks Konektivitas atas $\Omega_{Q_{4n}}$	47
3.5. Graf Koprime atas Grup Quaternion Tergeneralisasi dengan n Lainnya	81
IV PENUTUP	106
4.1. Kesimpulan	106
4.2. Saran	107

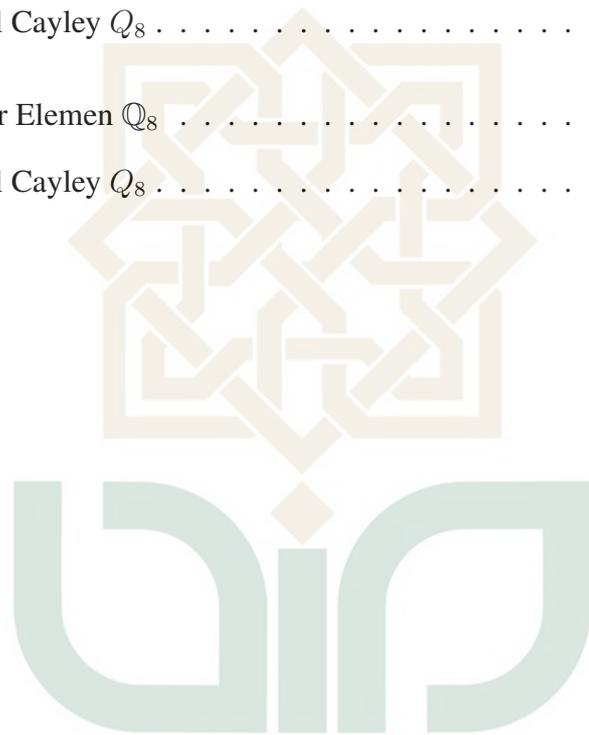
DAFTAR PUSTAKA 107



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR TABEL

1.1	Tabel Persamaan dan Perbedaan	9
2.1	Tabel Cayley Q_8	19
3.1	Order Elemen Q_8	38
3.2	Tabel Cayley Q_8	40



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR GAMBAR

1.1	Skema Metode Penelitian	11
2.1	Graf G secara umum	20
2.2	Graf G untuk menunjukkan <i>adjacent</i> dan insiden	21
2.3	Graf G untuk menunjukkan <i>adjacent</i> dan insiden	22
2.4	Graf G untuk menunjukkan walk	23
2.5	Graf G dan Graf S untuk menunjukkan graf terhubung dan graf tidak terhubung	24
2.6	Graf G untuk menunjukkan jarak antara dua vertek	25
2.7	Graf Reguler	26
2.8	Graf Kosong	26
2.9	Graf Komplit	26
2.10	Graf Cycle	27
2.11	Graf Bipartit	27
2.12	Graf Bipartit Lengkap	28
2.13	Graf Tripartit	28
2.14	Graf Tripartit Lengkap	29
2.15	Graf Bintang	29
2.16	Graf C	30
2.17	Graf S	31
3.1	Graf A	44
3.2	Graf $\Omega_{Q_{4n}}$ untuk n adalah prima ganjil.	45
3.3	Graf B	47

3.4 Graf Koprime $\Omega_{Q_{40}}$ 84



DAFTAR LAMBANG

$a \in A$: a anggota di A
Q_{4n}	: grup quaternion tergeneralisasi
$\Omega_{Q_{4n}}$: graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi
Ω_G	: graf koprima G
\mathbb{Z}	: himpunan semua bilangan bulat
\mathbb{Z}_n	: himpunan semua bilangan bulat modulo n
\mathbb{R}	: himpunan semua bilangan real
$a b$: a membagi habis b
■	: akhir suatu bukti
□	: akhir suatu contoh
→	: menuju
$ a $: order atas a dalam suatu grup
$[A]$: kelas partisi A
$deg(v_i)$: derajat vertek i
$d(v_i, v_j)$: jarak antara vertek i dengan vertek j pada graf
0_n	: graf kosong
K_n	: graf komplet
C_n	: graf <i>cycle</i>
$K_{m,n}$: graf bipartit lengkap
$K_{r,s,t}$: graf tripartit lengkap
S_n	: graf bintang

- $M_1(\Omega)$: Indeks Zagreb Pertama pada graf
 $M_2(\Omega)$: Indeks Zagreb Kedua pada graf
 $W(\Omega)$: Indeks Wiener pada graf
 $WW(\Omega)$: Indeks *Hyper*-Wiener pada graf
 $H(\Omega)$: Indeks Harary pada graf
 $S_z(\Omega)$: Indeks Szeged pada graf
 $N_1(e|\Omega)$: jarak v_i dengan v_j kurang dari jarak v_i dengan v_k
 $N_2(e|\Omega)$: jarak v_i dengan v_k kurang dari jarak v_i dengan v_j

INTISARI

INDEKS-INDEKS KONEKTIVITAS DARI GRAF KOPRIMA DARI GRUP QUATERNION TERGENERALISASI

Oleh

Aulia Tiffani Rizky

20106010027

Grup quaternion tergeneralisasi merupakan perluasan dari grup quaternion dengan order 8 yang dinotasikan dengan Q_{4n} . Sementara graf koprima merupakan graf yang terbentuk dari representasi grup berhingga pada graf di mana vertek merupakan elemen pada grup dengan edge yang menghubungkan kedua elemen dalam grup tersebut jika dan hanya jika ordernya saling prima, graf koprima yang dinotasikan dengan Ω_G . Penelitian ini mengkaji bentuk dan sifat graf koprima atas Q_{4n} dengan n adalah bilangan prima ganjil, $n = 2^k$, dan $n = 2p$, dan dicari indeks-indeks konektivitasnya. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur, diawali dengan mensubstitusikan nilai n pada Q_{4n} , kemudian diperoleh bentuk dan sifat dari graf koprima atas Q_{4n} , dan dilanjutkan dengan mencari 6 indeks konektivitas. Sebelumnya telah diperoleh bentuk dan sifat graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi dengan n adalah bilangan prima ganjil yakni graf tripartit, dan $n = 2^k$ adalah graf bintang, serta diperoleh 6 indeks konektivitas, dilanjutkan dengan terbentuk juga graf koprima lainnya dengan $n = 2p$ adalah graf tripartit. Hasil dalam penelitian ini adalah indeks konektivitas pada graf koprima dengan bentuk $n = 2p$ dengan mengangkat kasus khusus dalam pembentukan graf koprima. Selanjutnya, diperoleh enam indeks konektivitas, yakni Indeks Zagreb Pertama, Indeks Zagreb Kedua, Indeks Wiener, Indeks *hyper*-Wiener, Indeks Harary, dan Indeks Szeged.

Kata kunci : Grup Quaternion Tergeneralisasi, Graf Koprima, Indeks-Indeks Konektivitas.

ABSTRACT

CONNECTIVITY INDICES OF COPRIME GRAPH OF GENERALIZED QUATERNION GROUP

By

Aulia Tiffani Rizky

20106010027

The generalized quaternion group is an extension of the quaternion group of order 8 denoted by Q_{4n} . While the coprime graph is a graph formed from the representation of a finite group on a graph where vertices are elements in the group with edges connecting the two elements in the group if and only if their orders are mutually prime, the coprime graph is denoted by Ω_G . This research studies the form and properties of coprime graphs over Q_{4n} with n is an odd prime number, $n = 2^k$, and $n = 2p$, and find its connectivity indices. The research method used is a literature study, starting with substituting the value of n in Q_{4n} , then the form and properties of the coprime graph over Q_{4n} are obtained, and continued by finding 6 indices connectivity. Previously, the form and properties of the coprime graph over the generalized quaternion group with n is an odd prime number, namely the tripartite graph, and $n = 2^k$ is a star graph, and the 6 connectivity indices was obtained, followed by another coprime graph with $n = 2p$ is the tripartite graph. The result in this study is the connectivity indices on coprime graphs of the form $n = 2p$ by raising a special case in the formation of coprime graphs. Furthermore, six connectivity indices are obtained, namely First Zagreb Index, Second Zagreb Index, Wiener Index, *hyper*-Wiener Index, Harary Index, and Harary Index.

Keyword : Generalized Quaternion Group, Coprime Graph, Connectivity Indices.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Bermula dari geometri yang berkaitan dengan jarak, panjang, luas, dan volume yang digunakan dalam survei, konstruksi, dan astronomi. Seorang matematikawan Jerman, yakni Gottfried Leibniz memperkenalkan cabang lain geometri, yang disebut geometri posisi. Cabang geometri ini berkaitan dengan penentuan posisi dan sifatnya, salah satu contohnya adalah teori graf.

Teori graf memulai perjalanannya dari "Masalah Jembatan Königsberg" yang terkenal. Saat tahun 1736, Euler memecahkan permasalahan tersebut dengan bantuan teori graf, yang kemudian peristiwa ini sering disebut sebagai awal mula dari teori graf. Graf merupakan himpunan tak kosong yang terdiri dari himpunan vertek V dan himpunan edge E yang mungkin kosong (Chartrand et al., 2010). Meskipun relatif tua, penerapan teori graf semakin berkembang, salah satunya representasi graf terhadap grup berhingga.

Menindaklanjuti hal tersebut, perlu diuraikan secara singkat jenis graf yang sering digunakan dalam merepresentasikan grup berhingga, yakni graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi. Diketahui, bahwa grup quaternion tergeneralisasi merupakan perluasan dari grup quaternion yang didefinisikan sebagai himpunan elemen dengan sifat khusus yang mirip dengan sifat pada grup dihedral dengan order $4n$ di mana n adalah bilangan bulat positif. Selain itu, grup quaternion tergeneralisasi memiliki struktur yang kompleks, memiliki banyak subgrup normal,

termasuk subgrup siklik dan subgrup quaternion (Brown,2012), dan memiliki banyak automorfisme, yaitu pemetaan yang mempertahankan struktur operasi grup (Xie et al.,2023). Dalam hal ini, graf koprime berperan sebagai bentuk yang memiliki vertek yang mewakili semua elemen dalam grup quaternion tergeneralisasi, dan dua vertek yang dihubungkan dengan edge jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesarnya adalah 1. Akibatnya, dua vertek akan *adjacent* bergantung pada order elemen dalam grup quaternion tergeneralisasi.

Selain itu, peran penting graf koprime lainnya, yakni menunjukkan hubungan antarelemen dalam grup berdasarkan order masing-masing, kemudian menjadi salah satu sifat penting dalam teori grup (Nurhabibah et al., 2021). Selanjutnya, dicari indeks konektivitas di mana elemen grup diwakili oleh vertek dan dihubungkan oleh edge dalam graf koprime, sehingga memiliki karakteristik unik yang tercermin dalam indeks konektivitasnya (Zahidah et al.,2021).

Berdasarkan uraian di atas, perlu diketahui pengertian indeks konektivitas. Indeks konektivitas dalam bidang matematika, merupakan salah satu ukuran yang menggambarkan seberapa kuat graf terhubung. Indeks konektivitas dari suatu graf G merupakan nilai minimum dari jumlah derajat vertek yang harus dihapus, untuk membuat graf tersebut tidak *adjacent* (Qumah,2020).

Selain itu, indeks konektivitas dalam bidang kimia merupakan deskriptor molekul yang dihitung berdasarkan graf molekul senyawa kimia, sehingga dapat mengetahui sifat khusus suatu molekul (Zahidah et al.,2021). Deskriptor molekul adalah ukuran numerik yang berasal dari teori graf guna menggambarkan bentuk molekul (Todeschini & Consonni, 2008). Graf molekul adalah struktur senyawa yang terikat secara kovalen, yang diasumsikan sebagai graf dengan atom mewakili vertek dan ikatan antar atom adalah edge (Alimon et al.,2018).

Setelah memahami pengertian indeks konektivitas dalam bidang matematika maupun bidang kimia, perlu diketahui bahwa terdapat beberapa indeks konektivitas yang menarik untuk dibahas, yakni *hyper*-Wiener, Wiener, Harary, Szeged, dan dua indeks Zagreb yang umum digunakan, yakni Zagreb Pertama dan Zagreb Kedua. Beberapa indeks tersebut, secara umum dapat memberikan keterkaitan antara atom-atom dalam molekul. Salah satunya, dalam Indeks Wiener yang digunakan untuk memperkirakan titik didih alkana, yang dikenal dengan paraffin (Alimon et al., 2018). Perlu diketahui, dalam menghitung indeks-indeks tersebut digunakan cara yang berbeda, berikut akan dijelaskan cara menghitung indeks-indeks tersebut.

Untuk menghitung Indeks Zagreb Pertama, yakni menjumlahkan kuadrat derajat semua vertek dalam graf terhubung, sedangkan untuk menghitung Indeks Zagreb Kedua yakni menjumlahkan hasil kali derajat pasangan vertek yang *adjacent* dalam graf terhubung (Das et al., 2015). Lain halnya dalam menghitung Indeks Wiener, yakni menjumlahkan kuadrat jarak antara semua pasangan vertek pada graf terhubung (Dobrynin et al., 2001). Untuk menghitung Indeks *hyper*-Wiener, ada keterkaitan dengan hasil Indeks Wiener, yakni setengah dari total penjumlahan Indeks Wiener dan jumlah kuadrat jarak antara semua pasangan vertek dalam graf terhubung (Xu & Das, 2011).

Untuk menghitung Indeks Harary, yakni menjumlahkan kebalikan jarak pasangan vertek pada graf terhubung (Xu & Das, 2011). Terakhir, dalam menghitung Indeks Szeged yakni menjumlahkan hasil kali persekitaran jarak terpendek u ke v kurang dari jarak terpendek u ke w dengan persekitaran jarak terpendek dari u ke w kurang dari jarak terpendek u ke v dengan $u, v, w \in V(G)$ (Dobrynin et al., 2001).

Berdasarkan pengertian graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi, dan salah satu peran pentingnya sebagai indeks konektivitas. Banyak peneliti tertarik

pada graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi, karena pada graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi menggambarkan vertek yang dilambangkan oleh atom dan edge adalah ikatan antaratom (Gayatri et al., 2023). Selain itu, dapat dengan mudah menganalisa sifat pada grup dan keterhubungannya, seperti kombinatorik dan teori bilangan (Nurhabibah et al., 2021).

Terdapat kelebihan lain dalam mencari indeks konektivitas dari graf koprima dari grup quaternion tergeneralisasi, yakni mengetahui salah satu variasi indeks konektivitas, yaitu indeks konektivitas eksentrik yang mempertimbangkan jarak antarvertek dalam graf dengan menjumlahkan derajat vertek minimum di antara semua vertek dalam grup (Mujiono, 2020). Indeks konektivitas eksentrik dari suatu graf G adalah jumlah derajat vertek dan eksentrisitas vertek yang minimal di antara semua vertek dalam G , di mana eksentrisitas vertek merupakan jarak maksimum dari suatu vertek ke vertek lainnya (Mujiono, 2020).

Kelebihan selanjutnya, dapat mengetahui sifat-sifat graf, seperti graf bipartit, yaitu graf yang verteknya dapat dibagi menjadi 2 himpunan sedemikian sehingga tidak ada edge yang menghubungkan 2 vertek dalam himpunan yang sama. Graf koprima juga memiliki diameter 2, yaitu jarak maksimum antara 2 vertek manapun dalam graf tersebut adalah 2. Selain itu, memiliki radius 1, yaitu jarak minimum suatu vertek dengan vertek lainnya dalam graf tersebut adalah 1. Dan memiliki cakupan 1, yaitu setiap vertek dalam graf tersebut dapat dijangkau oleh setidaknya 1 vertek lainnya.

Oleh karena itu, dipilih graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi dengan n adalah bilangan prima ganjil, $n = 2^k$, dan $n = 2p$, karena saat menghitung indeks konektivitasnya lebih mudah, dengan mengetahui derajat dan eksentrisitas dari setiap vertek, yang dapat ditentukan berdasarkan sifat-sifat bilangan prima

yang digunakan dalam perhitungannya (Nurhabibah et al., 2021). Selain itu juga, memiliki struktur yang lebih sederhana, karena terdapat banyak elemen grup yang ordernya relatif prima, sehingga akan banyak juga edge yang menghubungkan vertek-verteknya (Zahidah et al., 2021). Kemudian, graf koprima sering digunakan dalam penelitian matematika, guna menganalisis sifat pada grup dan keterkaitan lainnya dalam bidang matematika, seperti kombinatorika dan teori bilangan (Nurhabibah et al., 2021).

Akibat dari salah satu inovasi Galois dalam membangun keterkaitan antara grup dan graf, yakni dapat membuka jalan bagi perkembangan teori graf dengan struktur aljabar, termasuk grup. Salah satu pengembangan teori graf dengan teori grup adalah graf koprima pada grup quaternion tergeneralisasi, yang dikenalkan oleh Zahidah, dkk. pada tahun 2021. Zahidah, dkk. memperkenalkan konsep baru teori graf dengan teori grup melalui jurnal berjudul "*Connectivity Indices of Coprime Graph of Generalized Quaternion Group*". Jurnal yang diteliti Zahidah, dkk. menjadi rujukan utama penulis dalam pembuatan skripsi ini.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan Zahidah, dkk. dan Nurhabibah, dkk, dipilih graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi di mana n adalah bilangan prima ganjil, $n = 2^k$ dengan k bilangan asli (Zahidah et al., 2021), dan $n = 2p$ dengan p adalah bilangan prima lainnya (Nurhabibah et al., 2021), di mana masing-masing merupakan graf tripartit dan graf bintang.

Skripsi ini memperkenalkan konsep grup quaternion tergeneralisasi pada graf koprima. Selanjutnya, pembahasan dilanjutkan dengan ditentukannya bentuk graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi, bergantung pada order elemennya. Bentuk graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi diterapkan pada indeks konektivitas, berdasarkan kelas partisi dengan deskripsi dan contohnya. Kemudian,

diakhiri dengan mengembangkan penelitian dengan mengganti $n = 2p$ dengan p adalah bilangan prima lainnya, guna mendapatkan bentuk graf koprima lainnya, kemudian dicari indeks konektivitasnya.

1.2. Batasan Masalah

Judul skripsi ini adalah indeks-indeks konektivitas dari graf koprima dari grup quaternion tergeneralisasi, dengan bentuk graf koprima dibatasi hanya dengan n adalah bilangan prima ganjil, $n = 2^k$ dengan k bilangan asli, $n = 2p$ dengan p adalah bilangan prima lainnya. Dilanjutkan dengan pembahasan graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi, dan mencari 6 indeks konektivitas dari graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi, yakni Indeks Zagreb Pertama, Indeks Zagreb Kedua, Indeks Wiener, Indeks *hyper*-Wiener, Indeks Harary, dan Indeks Szeged.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk dan sifat graf koprima atas Q_{4n} dengan n adalah bilangan prima ganjil, $n = 2^k$ di mana k adalah bilangan asli, $n = 2p$ di mana p adalah bilangan prima lainnya?
2. Bagaimana indeks-indeks konektivitas dari graf koprima atas Q_{4n} dengan n adalah bilangan prima ganjil dan $n = 2^k$ di mana k adalah bilangan asli?
3. Bagaimana indeks-indeks konektivitas dari graf koprima atas Q_{4n} dengan $n = 2p$ di mana p adalah bilangan prima lainnya?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari tentang bentuk dan sifat graf koprima atas Q_{4n} dengan n adalah bilangan prima ganjil, $n = 2^k$ di mana k adalah bilangan asli, $n = 2p$ di mana p adalah bilangan prima lainnya.
2. Mempelajari tentang indeks-indeks konektivitas pada graf koprima atas Q_{4n} dengan n adalah bilangan prima ganjil dan $n = 2^k$ di mana k adalah bilangan asli.
3. Mempelajari tentang indeks-indeks konektivitas pada graf koprima atas Q_{4n} dengan $n = 2p$ di mana p adalah bilangan prima lainnya.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman terkait bentuk dan sifat graf koprima atas Q_{4n} dengan n bilangan prima ganjil, $n = 2^k$ di mana k bilangan asli, $n = 2p$ dengan p bilangan prima lainnya.
2. Memberikan pemahaman terkait indeks-indeks konektivitas dari graf koprima atas Q_{4n} dengan n bilangan prima ganjil dan $n = 2^k$ dengan k bilangan asli.
3. Memberikan pemahaman terkait indeks-indeks konektivitas dari graf koprima atas Q_{4n} dengan $n = 2p$ dengan p bilangan prima lainnya.

1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan skripsi ini bersumber dari buku, makalah, jurnal, dan skripsi.

1. Jurnal karya Arif Munandar (2023) dengan judul *Some Properties on Coprime Graph of Generalized Quaternion Groups* membahas tentang grup quaternion tergeneralisasi dan graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi.
2. Jurnal karya Nurhabibah, Abdul Gazir Syarifudin, dan I Gede Adithya Wisnu Wardhana (2021) dengan judul *Some Results of The Coprime Graph of a Generalized Quaternion Group Q_{4n}* membahas tentang beberapa bentuk graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi.
3. Jurnal karya Siti Zahidah, Dwi Mifta Mahanani, dan Karine Lutfiah Oktaviana (2020) dengan judul *Connectivity Indices of Coprime Graph of Generalized Quaternion Group* membahas tentang indeks konektivitas pada graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi.

Dalam penelitian yang dilakukan oleh penulis, terdapat perbedaan penelitian penulis dengan penelitian sebelumnya, yakni melanjutkan pengembangan penelitian dengan mencari indeks konektivitas pada graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi dengan mengangkat kasus khusus dalam pembentukan graf dengan $n = 2p$ di mana p bilangan prima lainnya.

Selanjutnya, akan dijelaskan dalam tabel mengenai perbedaan dan persamaan yang dilakukan penulis dalam penelitiannya dengan rujukan yang penulis cantumkan, berikut diberikan tabel persamaan dan perbedaan penelitian.

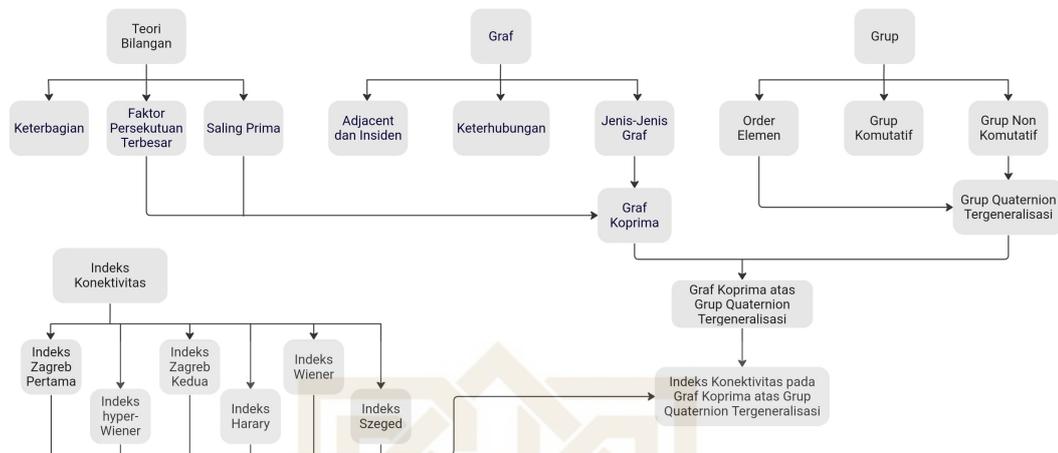
Tabel 1.1 Tabel Persamaan dan Perbedaan

No	Judul	Penulis	Persamaan	Perbedaan
1	<i>Connectivity Indices of Coprime Graph of Generalized Quaternion Group</i>	Siti Zahidah, Dwi Mifta Mahanani, dan Karine Lutfiah Oktaviana	Membahas indeks konektivitas pada graf koprima atas Q_{4n} dengan n adalah bilangan prima ganjil dan $n = 2^k$.	Menambahkan bentuk graf koprima dengan $n = 2p$ dengan p adalah bilangan prima lainnya.
2	<i>Some Results of The Coprime Graph of a Generalized Quaternion Group Q_{4n}</i>	Nurhabibah, Abdul Gazir Syarifudin, dan I Gede Adithya Wisnu Wardhana	Membahas bentuk graf koprima dengan $n = 2p$ dengan p adalah bilangan prima lainnya.	Membahas Indeks konektivitas dari bentuk graf koprima dengan $n = 2p$ dengan p adalah bilangan prima lainnya.
3	<i>Some Properties on Coprime Graph of Generalized Quaternion Groups</i>	Arif Munandar	Membahas order elemen graf koprima atas Q_{4n} dengan n adalah bilangan prima ganjil dan $n = 2^k$.	Membahas indeks konektivitas pada graf koprima atas Q_{4n} dengan n adalah bilangan prima ganjil dan $n = 2^k$.

1.7. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku referensi, jurnal terkait topik penelitian, yaitu konsep dasar grup quaternion tergeneralisasi, graf koprima, indeks konektivitas, indeks konektivitas pada graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi, dan melihat pola yang sudah ditemukan oleh Nurhabibah, dkk, kemudian dicari indeks konektivitas dengan n yang berbeda. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

1. Membahas konsep dasar dari grup, graf, dan indeks konektivitas.
2. Membahas konsep dasar yang ada pada grup quaternion tergeneralisasi.
3. Membahas graf koprima dengan n bilangan prima ganjil, $n = 2^k$ dengan k bilangan asli, $n = 2p$ dengan p bilangan prima lainnya.
4. Membahas indeks-indeks konektivitas, yakni Indeks Zagreb Pertama, Indeks Zagreb Kedua, Indeks Wiener, Indeks *hyper*-Wiener, Indeks Harary, serta Indeks Szeged.
5. Membahas indeks-indeks konektivitas pada graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi dengan n adalah bilangan prima ganjil.
6. Membahas indeks-indeks konektivitas pada graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi dengan $n = 2^k$ dengan k adalah bilangan asli.
7. Dengan melihat pola yang sudah ditemukan oleh Nurhabibah, dkk (2022), kemudian dicari 6 indeks konektivitas pada graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi dengan $n = 2p$ dengan p bilangan prima lainnya.



Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab, yaitu sebagai berikut:

BAB 1: Bab ini membahas terkait latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB 2: Bab ini membahas terkait dasar dari FPB, saling prima, grup, graf, dan indeks konektivitas.

BAB 3: Bab ini membahas terkait dasar-dasar grup quaternion tergeneralisasi, graf koprime atas grup quaternion tergeneralisasi, serta indeks konektivitas pada graf koprime atas grup quaternion tergeneralisasi dengan n adalah bilangan prima ganjil, $n = 2^k$ dengan k adalah bilangan asli, dan $n = 2p$ dengan p adalah bilangan prima lainnya.

BAB 4: Bab ini berisikan terkait kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

PENUTUP

Bab penutup ini memberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Graf koprima dibentuk melalui proses vertek yang terdiri dari semua elemen dalam grup quaternion tergeneralisasi dan 2 vertek akan *adjacent* jika dan hanya jika FPB ordernya saling prima. Selain itu, proses pembentukan partisi pada graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi dapat menentukan sifat dan bentuk graf koprima, seperti graf bintang dan graf tripartit yang cenderung memiliki struktur yang lebih sederhana.
2. Indeks konektivitas pada graf koprima dari Q_{4n} dengan n bilangan prima ganjil dan $n = 2^k$ dapat dihitung dengan memperhatikan proses partisi pada elemen grup Q_{4n} . Akibatnya, akan menunjukkan sifat dan bentuk dari graf koprima sesuai dengan pensubstitusian nilai n . Selanjutnya, dapat dilihat derajat dan jarak yang dimiliki oleh setiap vertek dalam graf tersebut. Derajat yang dimiliki setiap vertek, bergantung pada edge yang menghubungkan suatu vertek dengan vertek lainnya. Begitupun dengan jarak yang dimiliki setiap vertek.

3. Indeks konektivitas pada graf koprima atas Q_{4n} dengan $n = 2p$ dapat dihitung dengan memperhatikan proses partisi setiap elemen pada Q_{4n} yang lebih kompleks. Oleh karena itu, diperoleh sifat dan bentuk graf koprima, yakni graf tripartit. Selanjutnya, dilakukan hal yang sama dengan melihat banyaknya derajat dan jarak yang dimiliki setiap vertek dalam graf. Kemudian, dicari 6 indeks konektivitasnya.

4.2. Saran

Saran yang dapat disampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Penelitian selanjutnya dapat membahas tentang sifat dan bentuk graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi dengan $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ di mana $p_1 \neq 2$ dan p_i adalah bilangan prima lainnya.
2. Penelitian selanjutnya dapat mencari 6 indeks konektivitas dari graf koprima atas grup quaternion tergeneralisasi dengan $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ di mana $p_i \neq 2$ dan p_i adalah bilangan prima lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Alimon, N. I., Sarmin, N. H., & Erfanian, A. (2018). Topological indices of non-commuting graph of dihedral groups. *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences*, pages 473–476.
- Brown, K. S. (2012). *Cohomology of groups*, volume 87. Springer Science & Business Media.
- Burton, D. M. (2007). Elementary number theory seventh edition.
- Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2010). *Graphs & digraphs*, volume 39. CRC press.
- Coxeter, H. S. & Moser, W. O. (2013). *Generators and relations for discrete groups*, volume 14. Springer Science & Business Media.
- Das, K. C., Xu, K., & Nam, J. (2015). Zagreb indices of graphs. *Frontiers of Mathematics in China*, 10:567–582.
- Dobrynin, A. A., Entringer, R., & Gutman, I. (2001). Wiener index of trees: theory and applications. *Acta Applicandae Mathematica*, 66:211–249.
- Gallian, J. A. (2016). Contemporary abstract algebra (ninth edit). *Brooks/Cole Cengage Learning*.
- Gayatri, M. R., Fadhilah, R., Lestari, S. T., Pratiwi, L. F., Abdurahim, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). Topology index of the coprime graph for dihedral group of prime power order. *Jurnal Diferensial*, 5(2):126–134.

- Klavvzar, S., Rajapakse, A., & Gutman, I. (1996). The szeged and the wiener index of graphs. *Applied Mathematics Letters*, 9(5):45–49.
- Ma, X., Wei, H., & Yang, L. (2014). The coprime graph of a group. *International Journal of Group Theory*, 3:13–23.
- Mujiono (2020). *Eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari komplemen grafkonjugasi dari grup dihedral*. PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
- Munandar, A. (2022). Pengantar matematika diskrit dan teori graf. *Sleman: Depublish*.
- Munandar, A. (2023). Some properties on coprime graph of generalized quaternion groups. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 17(3):1373–1380.
- Nurhabibah, N., Syarifudin, A. G., & Wardhana, I. G. A. W. (2021). Some results of the coprime graph of a generalized quaternion group q_{4n} . *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3(1):29–33.
- Qumah, L. (2020). *Eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari graf non-nilradical gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan*. PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
- Todeschini, R. & Consonni, V. (2008). *Handbook of molecular descriptors*. John Wiley & Sons.
- Xie, J.-H., Feng, Y.-Q., & Xia, B. (2023). Generalized quaternion groups with the m -dc property. *arXiv preprint arXiv:2306.16677*.
- Xu, K. & Das, K. C. (2011). On harary index of graphs. *Discrete applied mathematics*, 159(15):1631–1640.

Yamasaki, Y. (2018). Ramanujan cayley graphs of the generalized quaternion groups and the hardy–littlewood conjecture. *Mathematical Modelling for Next- Generation Cryptography: CREST Crypto-Math Project*, pages 159–175.

Zahidah, S., Mahanani, D. M., & Oktaviana, K. L. (2021). Connectivity indices of coprime graph of generalized quaternion group. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 27(3):285–296.