SKRIPSI

ANALISIS TITIK TETAP PADA RUANG METRIK-D LENGKAP-0

DHIYA ANISAH UTAMI
20106010044

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2024

ANALISIS TITIK TETAP PADA RUANG METRIK-D LENGKAP-0

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

diajukan oleh

DHIYA ANISAH UTAMI

20106010044

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2024

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir
Lamp :

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Dhiya Anisah Utami
NIM : 20106010044
Judul Skripsi : Analisis Titik Tetap Pada Ruang Metrik-d Lengkap-0

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 15 Mei 2024

Pembimbing I

Malahayati, S.Si., M.Sc
NIP. 198404122011012010

Pembimbing II

Aulia Khifah Futhona, M.Sc
NIP. 199206052019032021

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-891/Un.02/DST/PP.00.9/06/2024

Tugas Akhir dengan judul : ANALISIS TITIK TETAP PADA RUANG METRIK-D LENGKAP-0

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama	: DHIYA ANISAH UTAMI
Nomor Induk Mahasiswa	: 20106010044
Telah diujikan pada	: Kamis, 30 Mei 2024
Nilai ujian Tugas Akhir	: A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Malahayati, S.Si., M.Sc
SIGNED

Valid ID: 6660477074525

Penguji I

Aulia Khifah Futhona, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 66601436b5b80

Penguji II

Arif Munandar, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 66600621c10a0

Yogyakarta, 30 Mei 2024
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6661619333559

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Dhiya Anisah Utami
NIM	: 20106010044
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 20 Mei 2024

METERAI TEMPEL
10000
5031DALX045192947

Dhiya Anisah Utami

HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya sederhana ini saya persembahkan untuk ibu dan ayah saya tercinta, Adik tercinta, Teman-teman dan Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

HALAMAN MOTTO

Bersungguh-sungguhlah jangan bermalas-malas dan jangan lengah, karena penyesalan bagi orang yang bermalas-malas.

PRAKATA

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat, nikmat, serta hidayah-Nyalah, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Teorema Titik Tetap Pada Ruang Metrik-d Lengkap-0". penyusunan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis sadar bahwa dalam setiap langkah hidup ini, tidak pernah berjalan sendirian. Pada perjalanan menuju penyelesaian Skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun penulis merasa sangat beruntung dapat dikelilingi oleh banyak orang yang memberikan motivasi, inspirasi, kontribusi, bimbingan, dan dorongan sehingga *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Ibu Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Bapak Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Ibu Sri Istiyarti Uswatun Chasanah,M.Si., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
4. Ibu Malahayati, S.Si., M.Sc. dan Ibu Aulia Khifah Futhona, M.Sc., selaku dosen pembimbing I skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.

5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.

6. Ayah, ibu dan adik tercinta yang tiada henti memberikan dukungan, doa dan kasih sayang.

7. Teman-teman Analisis 2020, Ifa, Sisil, Awal yang senantiasa memberikan masukan dan menjadi teman belajar penulis selama pembuatan skripsi ini.

8. Keluarga Cemara Om A dan Ante M, Bapak A dan Mamak A, I, dan sodara A yang telah menghibur, menemani dan menyemangati hingga penulis bisa di tahap ini.

9. Teman terdekat dan teman-teman Matematika 2020 yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu yang senantiasa menjadi teman belajar selama menempuh pendidikan di UIN Sunan Kalijaga, memberikan dukungan dan doa.

10. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap skripsi ini dapat menjadi langkah awal menuju perjalan yang lebih besar pada bidang ini serta berharap kritik dan saran yang membangun. Semoga Allah SWT senantiasa meberkahi langkah-langkah kita semua.

Yogyakarta, 05 Mei 2024

Dhiya Anisah Utami

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{N}$	:	himpunan semua asli
$\mathbb{R}$	:	himpunan semua bilangan real
$\mathbb{R}^+$	:	himpunan semua bilangan real positif
$x \in \mathbb{R}$	:	x anggota $\mathbb{R}$
$A \subseteq X$	:	A himpunan bagian (*subset*) atau sama dengan X
$\lvert a \rvert$	:	nilai mutlak a
$A \subset X$	:	A himpunan bagian dari X
$<$	:	kurang dari
$>$	:	lebih dari
$\leq$	:	kurang dari sama dengan
$\geq$	:	lebih dari sama dengan
$\rightarrow$	:	menuju
$p \Rightarrow q$	:	jika p maka q
$\Leftrightarrow$	:	jika dan hanya jika
$\in$	:	Elemen
ϵ	:	epsilon
α	:	alpha
∞	:	takhingga
$X \times X$	:	X cros X
$\sup$	:	supremum
$f^n x_0$	:	komposisi fungsi f sebanyak n di titik x_0
$\blacksquare$	:	akhir suatu bukti

INTISARI

ANALISIS TITIK TETAP PADA RUANG METRIK-D LENGKAP-0

Oleh

Dhiya Anisah Utami

20106010044

Ruang metrik-d merupakan hasil genaralisasi dari ruang metrik parsial. Ruang metrik-d adalah himpunan tak kosong yang memenuhi tiga aksioma, yaitu kesamaan jika jaraknya 0, simetri dan ketaksamaan segitiga. Salah satu penerapan dari ruang metrik-d adalah titik tetap. Skripsi ini menganalisis fungsi pada ruang metrik-d lengkap-0 apabila barisan komposisi fungsi memenuhi beberapa kondisi, sehingga mengakibatkan barisan tersebut konvergen ke suatu titik. Lebih lanjut, titik tersebut merupakan titik tetap pada fungsi yang dimaksud. Selanjutnya, pada bagian ahkir skripsi ini diberikan suatu contoh untuk mengilustrasikan analisis yang telah dilakukan.

Kata kunci : Ruang Metrik, Ruang Metrik Parsial, Ruang Metrik-d, Titik Tetap, Ruang Metrik-d Lengkap-0.

ABSTRACT

A FIXED POINT ANALYSIS ON 0-COMPLETE D-METRIC SPACE

By

Dhiya Anisah Utami

20106010044

d-Metric spaces are a generalization of partial metric spaces. A d-metric space is a non-empty set that satisfies three axioms, namely similarity if the distance is 0, symmetry and triangle inequality. One of the applications of d-metric spaces is fixed points. This thesis analyzes a function on a complete d-metric space-0 if the composition line of the function satisfies some conditions, resulting in the line converging to a point. Furthermore, that point is a fixed point of the function in question. Furthermore, an example is given at the end of this thesis to illustrate the analysis that has been done.

Keyword : Metric Space, Partial Metric Space, d-Metric Space, Fixed Point, 0-Complete d-Metric Space.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Al-Qur'an merupakan kitab suci umat islam yang menjadi sumber dari segala ilmu. Keagungan dan ketegasannya tidak ada tandingannya hingga akhir waktu. Maka dari itu, sebagai muslim yang baik perlu menjadikannya sebagai rujukan dalam perkembanga ilmu pengetahuan. Al-Qur'an menyatakan bahwa dalam perkembangan ilmu dibutuhkan menganalisis suatu kejadian menggunakan logika dan pemikiran yang sistematis, sebagaimana firman Allah SWT dalam QS. Al-A'laa ayat 1-5.

سَبِّحِ اسْمَ رَبِّكَ الْأَعْلَى ۙ الَّذِي خَلَقَ فَسَوَّىٰ ۖ وَالَّذِي قَدَّرَ فَهَدَىٰ ۖ

وَالَّذِي أَخْرَجَ الْمَرْعَىٰ ۖ فَجَعَلَهُ غُثَاءً أَحْوَىٰ ۖ

Artinya: *"Sucikanlah nama Tuhanmu yang Maha Tinggi, Yang menciptakan, lalu menyempurnakan (ciptaan-Nya). Yang menentukan kadar (masing-masing) dan memberi petunjuk, dan yang menumbuhkan rerumputan, lalu dijadikan-Nya (rumput-rumput) itu kering kehitam-hitaman."* Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah memerintahkan kita untuk menganalisis terciptanya tumbuhan dari suatu kejadian tersebut (Maarif,2015).

Berdasarkan ayat Al-Qur'an tersebut menganalisis suatu kejadian dengan logika dan pemikiran yang sistematis merupakan hal yang penting. Hal ini sejalan dengan ilmu matematika yang memerlukan logika dan pemikiran sistematis. Pada ilmu matematika, terdapat beberapa konsentrasi, salah satunya adalah analisis. Analisis yang kemudian memiliki beberapa cabang ilmu, salah satunya adalah analisis fungsional.

Analisis fungsional adalah cabang ilmu matematika murni, khususnya analisis yang mempelajari suatu ruang seperti ruang metrik, ruang norm dan ruang lainnya. Ilmu ini diperkuat oleh konsep-konsep dari ilmu analisis real, aljabar, persamaan diferensial biasa dan parsial serta kalkulus. Menurut Kreysziq pada tahun 1991 analisis fungsional merupakan cabang matematika abstrak yang berasal dari analisis klasik.

Ruang metrik pertama kali dikenalkan pada tahun 1906 oleh Maurice Fréchet, seorang matematikawan asal Prancis. Ruang metrik adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu metrik. Umumnya, ruang metrik disajikan dengan notasi (X, d) dengan X adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi d dan d adalah suatu pemetaan himpunan tak kosong yang memenuhi empat aksioma dan selanjutnya disebut metrik. Seiring perkembangan ilmu, ruang metrik mengalami pengembangan sehingga muncul konsep ruang metrik baru.

Pada tahun 1992, Matthews mengembangkan konsep ruang metrik baru yang dinamakan ruang metrik parsial. Pendefinisian pada ruang metrik parsial lebih lemah dibandingkan ruang metrik. Pengembangan ini muncul sebagai tanggapan terhadap permasalahan yang timbul dalam ilmu komputer, di mana dua titik yang identik tidak selalu memiliki jarak nol. Perbedaan yang terlihat adalah pada aksioma kedua pada ruang metrik, jarak antara dua titik yang identik akan selalu sama dengan nol, sedangkan pada ruang metrik parsial jarak antara dua titik yang identik tidak selalu nol.

Hitzler dan Seda memperkenalkan ruang metrik-d *(dislocated metric space).* sebagai metrik dengan jarak dari suatu titik ke dirinya sendiri tidak selalu bernilai nol pada tahun 2000, yang merupakan hasil pengembangan dari ruang metrik parsial. Menurutnya pendefinisian terhadap ruang metrik-d dimotivasi dengan peran topologi dalam logika pemrograman semantik serta ruang metrik-d merupakan ruang yang lebih lemah dibandingkan ruang metrik parsial. Hal tersebut terlihat pada aksioma ke empat pada ruang metrik parsial yang pada ruang metrik-d nilai $(p(y, y) = 0)$. Ruang metrik-d yang memenuhi definisi kelengkapan disebut ruang metrik-d lengkap-0 atau lebih singkat disebut lengkap-0.

Pada ruang lengkap-0, terdapat salah satu pembahasan yang menarik untuk dibahas, yaitu teorema titik tetap. Teorema titik tetap memiliki nilai penting dalam matematika terapan, Karena aplikasinya memiliki hubungan dalam berbagai cabang ilmu matematika. Menurut Malahayati pada tahun 2017, cabang ilmu tersebut meliputi persamaan diferensial, persamaan integral, dan bidang ilmu matematika lainnya terutama pada logika pemrograman dan teknik elektronik. Stefan Banach pertama kali memperkenalkan teorema titik tetap, yang lebih dikenal dengan Teorema Titik Tetap Banach. Teorema tersebut menjadi dasar dalam penelitian yang dilakukan oleh Matthews, membahasnya pada ruang metrik parsial dan Lech Pasicki, membahasnya pada ruang metrik-d lengkap-0.

Skripsi ini bertujuan untuk menyajikan pemahaman yang menyeluruh mengenai teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0. Selain membahas dan menganalisis teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0, penelitian ini secara sistematis akan membahas beberapa teorema pendukung yang memperkuat teorema utama. Selanjutnya, akan dibahas pula definisi ruang metrik parsial dan ruang metrik-d yang menjadi dasar dalam pembuktian teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0. Lebih lanjut, akan disajikan langkah-langkah pembuktian yang terstruktur serta contoh-contoh yang berkaitan.

1.2. Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang, batasan masalah pada skripsi ini mencakup teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0 serta pembuktian secara sistematis dan terstruktur pada teorema tersebut. Adanya batasan masalah pada skripsi guna menghindari pembahasan objek yang meluas dari topik utama tersebut.

1.3. Rumusan Masalah

Bersumber latar belakang dan batasan masalah yang telah dijelaskan sebelumnya, maka perumusan masalah dapat disajikan sebagai berikut:

1. Bagaimana hubungan antara ruang metrik, ruang metrik parsial dan ruang metrik-d?
2. Bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada ruang metrik-d lengkap-0?
3. Bagaimana analisa pembuktian teorema titik tetap di ruang metrik-d lengkap-0?

1.4. Tujuan Penelitian

Penulis merancang penelitian ini dengan tujuan sebagai berikut:

1. Menganalisis dan memberikan contoh hubungan antara ruang metrik dengan ruang metrik parsial serta ruang metrik-d.
2. Mengkaji sifat-sifat pada ruang metrik-d lengkap-0.

3. Menganalisis berlakunya teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0.

1.5. Manfaat Penelitian

Pada penelitian ini, beberapa manfaat yang diharapkan dapat diperoleh, diantaranya adalah:

1. Memberikan pemahaman berkenaan dengan hubungan ruang metrik, ruang metrik parsial dan ruang metrik-d.
2. Memberikan pengetahuan sifat-sifat yang berlaku pada ruang metrik-d lengkap-0.
3. Memberikan pandangan tentang teori titik tetap pada ruang metrik baru yaitu ruang metrik-d lengkap-0.

1.6. Tinjauan Pustaka

Ruang metrik parsial diperkenalkan oleh Matthews pada tahun 1992 pada penelitinya yang berjudul *"Partial Metric Topology"*. Kemudian Hitzler dan Seda pada tahun 2000 mengembangkan ruang metrik parsial yang dinamai ruang metrik-d pada penelitiannya yang berjudul *"Dislocated Topologies"*. Penelitian mengenai ruang metrik-d telah banyak dilakukan antara lain kelengkapan pada ruang metrik-d dan teorema titik tetap pada ruang metrik-d.

Pada tahun 2015, Leck Pasicki menjelaskan definisi ruang metrik-d lengkap-0 dan disertai contoh yang belum dibuktikan. Kemudian, pada tahun 2016 kembali meneliti teorema titik tetap untuk pemetaan kontraktif pada ruang metrik-d yang termotivasi dari penelitian yang dilakukan oleh Meir dan Keeler. Selanjutnya, ditahun 2020 Leck Pasicki kembali melakukan penelitian. Pada penelitiannya tersebut menjelaskan hubungan antara ruang metrik, ruang metrik parsial dan ruang metrik-d dan pembahasan utama mengenai teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-

0. Teorema tersebut akan menjadi teorema utama pada penelitian ini.

Selain mengacu pada literatur diatas, Penulisan menggunakan hasil penelitian sebelumnya antara lain: skripsi Ashlihatul Hidayati 2023 yang berjudul *"Kelengkapan ruang metrik terdislokasi"* penelitian tersebut membahas mengenai kelengkapan pada ruang metrik-d dan skripsi Mutia Utami yang berjudul *"Teorema Titik Tetap pada Ruang Dislocated Quasi Metrik tanpa Menggunakan Sifat Kekontinuan Fungsi"* penelitian tersebut membahas teorema titik tetap pada ruang metrik-dq.

Penelitian juga menggunakan beberapa rujukan pendamping yaitu buku yang berjudul *Introduction to Real Analysis* karya Robert G. Bartle dan Donald R. Sherbert serta *"Metric spaces"* karya Satish Shirali dan Harkrishan L. Vasudeva 2006. Dua rujukan tersebut merupakan rujukan yang mempermudah penulis dalam pemahaman dalam menganalisis teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0.

1.7. Metode Penelitian

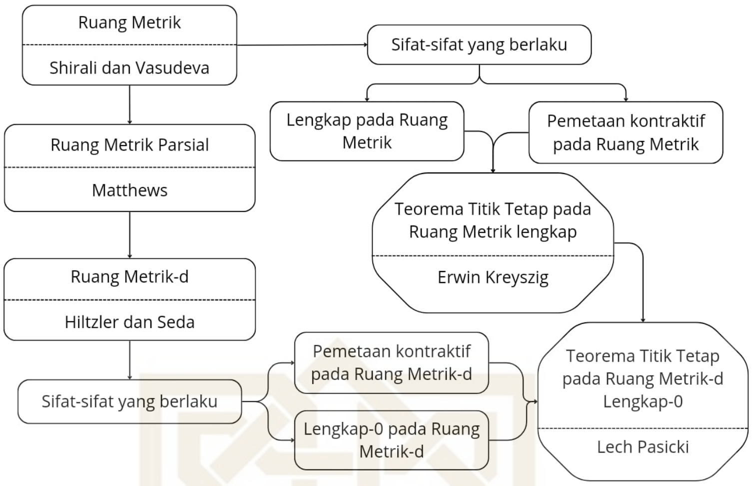
Metode studi literatur dipilih sebagai pendekatan utama dalam penyusunan skripsi ini. Menggunakan metode ini, penulis mendalami sumber-sumber yang berkaitan dengan penelitian, khususnya terkait dengan teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0. Selanjutnya, penelitian ini menerapkan pendekatan ilmiah yang bersifat kualitatif, di mana segala pendapat dan penilaian disajikan secara jelas dan tidak rumit. Pendekatan ini diharapkan dapat memberikan dukungan maksimal dalam pengembangan pembahasan.

Penelitian ini bermula pada ruang metrik. Pada ruang metrik banyak sifat yang berlaku seperti definisi kelengkapan dan definisi pemetaan kontraktif. Selanjutnya dari kedua definisi tersebut diperoleh suatu teorema yaitu teorema titik tetap pada ruang metrik lengkap yang menjelaskan jika diberikan ruang metrik lengkap dan berlaku pemetaan kontraktif maka mempunyai titik tetap yang tunggal.

Penelitian ini berlanjut pada hasil perkembangan dari ruang metrik yaitu ruang metrik parsial. Pada ruang metrik parsial dijelaskan hubungan antara ruang metrik dengan ruang metrik parsial disertai contoh yang berlaku. Selanjutnya ruang metrik parsial berkembang menjadi ruang metrik-d. pada ruang metrik-d dijelaskan hubungan antara ruang metrik parsial dengan ruang metrik-d dan sifat yang berlaku pada ruang metrik-d yaitu definisi pada kelengkapan yang dinamai lengkap-0 dan pemetaan kontraktif pada ruang metrik-d. Kemudian, dari dua definisi tersebut didapat teorema utama yaitu teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0.

Inti dari penelitian ini terfokus pada teorema utama yaitu teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0. Pembahasan mengenai hal ini akan diuraikan dengan menjelaskan setiap langkah pembuktian yang terkait dengan teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0 dan dilengkapi dengan contoh yang mengilustrasikan teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0, dengan merujuk pada penelitian yang dilakukan oleh Leck Pasicki pada tahun 2020.

Dalam rangka meningkatkan kejelasan dan memudahkan pemahaman,penelitian ini akan disertai dengan penjelasan rinci mengenai alur penelitian yang akan dibahas. Penjelasan ini bertujuan untuk memberikan pandangan umum yang lebih jelas kepada pembaca mengenai struktur dan perjalanan penelitian yang dilakukan. Adanya gambaran ini, pembaca diharapkan dapat mengikuti seiap tahap penelitian dengan mudah dan memperoleh pemahaman mendalam tentang proses dan metode penelitian yang digunakan. Oleh karena itu, berikut ini merupakan gambaran umum mengenai alur penelitian yang akan diuraikan secara rinci pada bab-bab selanjutnya:



Gambar 1.1 Alur Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Penulis membagi sistematika penulisan menjadi empat bab. Bab pertama mencakup latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab dua menyajikan dasar-dasar teori untuk mempermudah dalam pemahaman terhadap pembahasan yang akan diuraikan pada bab-bab selanjutnya. Bab ini menjelaskan dasar-dasar analisis real, definisi ruang metrik beserta sifat yang berlaku, dan penjelasan teorema titik tetap pada ruang metrik.

Bab tiga menjelaskan definisi ruang metrik parsial beserta sifat yang berlaku, definisi ruang metrik-d beserta sifat yang berlaku, definisi lengkap-0, dan pembuktian teorema titik tetap yang berlaku pada lengkap-0.

Bab empat, bab ini merupakan penutup yang berisikan tentang kesimpulan dari pembahasan bab-bab sebelumnya dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

1. Hubungan antara ruang metrik dengan ruang metrik parsial adalah setiap himpunan tak kosong yang dilengkapi metrik, merupakan ruang metrik parsial dan tidak berlaku sebaliknya. Sementara itu, hubungan antara ruang metrik parsial dengan ruang metrik-d adalah setiap himpunan tak kosong yang dilengkapi metrik parsial, merupakan ruang metrik-d dan tidak berlaku sebaliknya. Ketiga ruang tersebut semuanya memenuhi konsep dasar positifitas, kesamaan, simetris dan ketaksamaaan segitiga.

2. Sifat-sifat yang berlaku pada ruang metrik-d salah satunya adalah apabila diberikan ruang metrik-d dan barisan x_n jika jarak antara x_{n+1} dan x_n mendekati 0 untuk n tak hingga dan memenuhi Lemma 3.2.11, Berakibat jarak x_n dan x_m mendekati 0 untuk n, m tak hingga dan apabila ruang metrik-d merupakan ruang metrik-d lengkap-0 akibatnya x_n konvergen ke suatu titik di X.

3. Pada pembuktian aplikasi titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0 sebelumnya, diperlukan sifat yang mengatakan apabila ruang metrik-d merupakan ruang metrik-d lengkap-0 maka x_n konvergen ke suatu titik di X. Selanjutnya, dalam membuktikan teorema ini dimulai dengan membetuk barisan komposisi fungsi. Kemudian, akan ditujukan barisan tersebut merupakan barisan

konvergen ke suatu titik di X. Oleh kerena itu, diperoleh bahwa barisan tersebut memiliki suatu titik tetap.

4.2. Saran

Setelah menyelesaikan penelitian ini, penulis menyarankan:

1. Penelitian ini hanya sebatas membahas konsep dasar pada ruang metrik-d dan teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0. Pembuktian teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0 dapat dikembangkan agar dapat diterapkan pada contoh-contoh yang lebih rumit dengan memenuhi syarat pada Teorema 3.2.12.

2. Pada penelitian ini pada ruang metrik parsial diberikan definisi p-Cauhy dan p-konvergen. Berdasarkan kedua definisi tersebut dapat buktikan jika setiap barisan konvergen di ruang metrik parsial, maka barisan Cauchy dan dapat dikembangkan contoh untuk ruang metrik parsial lengkap.

3. Contoh-contoh yang diberikan untuk ruang metrik-d lengkap-0 dirasa masih sangat kurang sehingga perlu adanya penelitian lebih lanjut yang membahas dan mengembangkannya agar memperoleh contoh-contoh ruang metrik-d lengkap-0 yang lebih beragam.

4. Penelitian tentang teorema titik tetap pada ruang metrik-d lengkap-0 dapat dikembangkan menjadi pembahasan yang lebih rumit seperti pada pemetaan siklik, ruang metrik-dq dan metrik flet.

Semoga tugas akhir ini dapat menjadi acuan dan sumber inspirasi bagi pembaca untuk mengembangkan lebih lanjut tentang teorema titik tetap, khususnya dalam pembahasan yang telah dibahas.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction to real analysis*, volume 2. Wiley New York.

Bukatin, M., Kopperman, R., Matthews, S., & Pajoohesh, H. (2009). Partial metric spaces. *The American Mathematical Monthly*, 116(8):708–718.

Hitzler, P. & Seda, A. K. (2000). Dislocated topologies. *J. Electr. Eng*, 51(12):3–7.

Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications*, volume 17. John Wiley & Sons.

Maarif, S. (2015). Integrasi matematika dan islam dalam pembelajaran matematika. *Infinity*, 4(2):223–236, DOI: 10.22460/infinity.v4i2.85.

Malahayati, M. (2017). Ketunggalan titik tetap di ruang dislocated quasi b-metrik pada pemetaan siklik. *Mantik: Jurnal Matematika*, 3:39–43, DOI: 10.15642/mantik.2017.3.1.39-43.

Pasicki, L. (2015). Dislocated metric and fixed point theorems. *Fixed point theory and applications*, 2015:1–14.

Pasicki, L. (2016). Some extensions of the meir-keeler theorem. *Fixed Point Theory and Applications*, 2017, https://api.semanticscholar.org/CorpusID:256251447.

Pasicki, L. (2020). A strong fixed point theorem. *Topology and its Applications*, 282:107300, ISSN: 0166-8641, DOI:

https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107300, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864120302431.

Sagita Charolina S, E. S. (2018). *Ruang Metrik dan Ruang Metrik Parsial*. Deepublish.

Shirali, S. & Vasudeva, H. L. (2006). *Metric spaces*. Springer Science & Business Media.

Wadkar, L. N. M. . B. R. (2019). Dislocated metric space with some fixed point theorems. *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research*, 7:1–24.