

SKRIPSI

**HUBUNGAN KETAKSAMAAN SEGITIGA DAN
KETAKSAMAAN CAUCHY-SCHWARZ MENGGUNAKAN
SEMI INNER PRODUK TAPIA**



SILVIA RACHMAWATI
20106010040
STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2024

**HUBUNGAN KETAKSAMAAN SEGITIGA DAN
KETAKSAMAAN CAUCHY-SCHWARZ MENGGUNAKAN
SEMI INNER PRODUK TAPIA**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



diajukan oleh

SILVIA RACHMAWATI

20106010040

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2024



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Silvia Rachmawati

NIM : 20106010040

Judul Skripsi : Hubungan Ketaksamaan Segitiga Dan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz Menggunakan Semi Inner Produk Tapia

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 25 Juni 2024

Pembimbing

Malahayati, S.Si., M.Sc

NIP. 19840412 201101 2 010



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Silvia Rachnawati

NIM : 20106010040

Judul Skripsi : Hubungan Ketaksamaan Segitiga Dan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz
Menggunakan Semi Inner Produk Tapia

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 25 Juni 2024

Pembimbing

Aulia Khifah Fuhona, M.Sc.

NIP. 19920605 201903 2 021



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1165/Un.02/DST/PP.00.9/07/2024

Tugas Akhir dengan judul : HUBUNGAN KETAKSAMAAN SEGITIGA DAN KETAKSAMAAN CAUCHY
-SCHWARZ MENGGUNAKAN SEMI INNER PRODUK TAPIA

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : SILVIA RACHMAWATI
Nomor Induk Mahasiswa : 20106010040
Telah diujikan pada : Jumat, 05 Juli 2024
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang
Malahayati, S.Si., M.Sc
SIGNED

Valid ID: 669a4865b96b4



Penguji I
Aulia Khifah Futhona, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 669603a31e105



Penguji II
Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 669a4f2a9666b



Yogyakarta, 05 Juli 2024
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 669e09dc76f72

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Silvia Rachmawati
NIM : 20106010040
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 25 Juni 2024



Silvia Rachmawati

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



Karya ini saya persembahkan untuk ibu dan ayah serta

Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN

Sunan Kalijaga

HALAMAN MOTTO



”Bersemangatlah atas hal-hal yang bermanfaat bagimu. Minta tolonglah pada Allah Subhanahu wa Ta’ala, jangan engkau lemah.” (Hadits Riwayat Muslim)

PRAKATA

Allhamdulillah *rabbil' alamin*, puji syukur kehadiran Allah Subhanahu wa Ta'ala yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya, sehingga skripsi dengan judul "HUBUNGAN KETAKSAMAAN SEGITIGA DAN KETAKSAMAAN CAUCHY-SCHWARZ MENGGUNAKAN SEMI INNER PRODUK TAPIA" dapat diselesaikan. Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam skripsi ini mengucapkan terima kasih kepada:

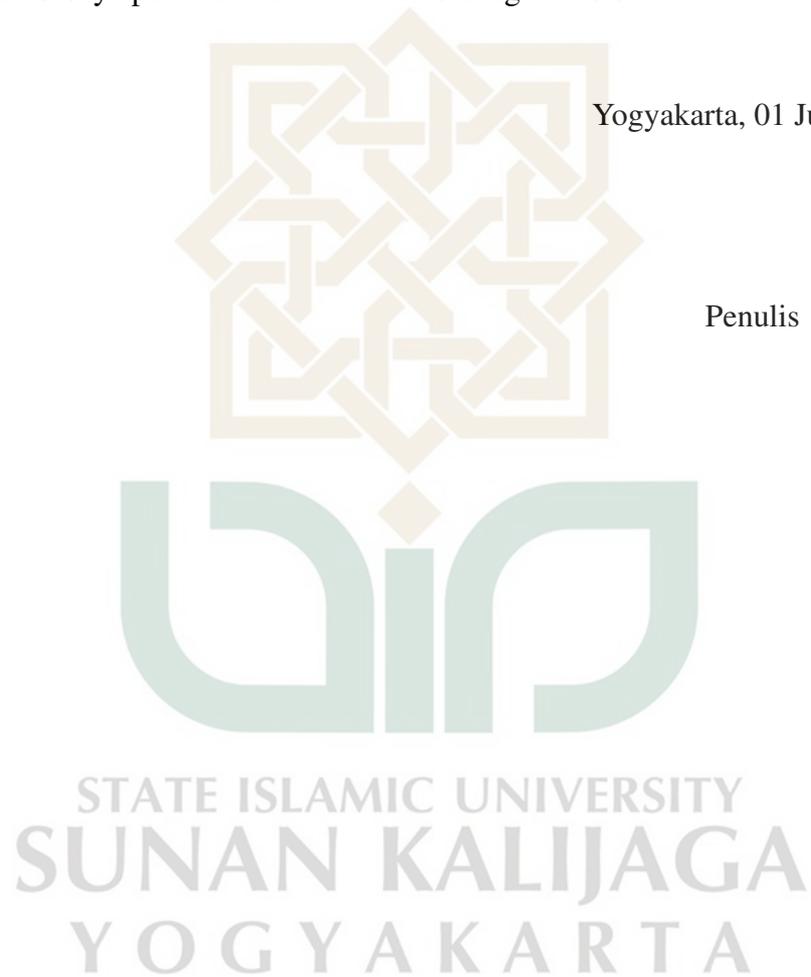
1. Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Arif Munandar, M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
4. Malahayati, S.Si., M.Sc., dan Aulia Khifah Futhona, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.

6. Orang Tua, sahabat, pihak lain yang berperan dalam pengerjaan skripsi, dan semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Khususnya peminat matematika di bidang analisis.

Yogyakarta, 01 Juli 2024

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
HALAMAN MOTTO	vii
PRAKATA	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMBANG	xiii
INTISARI	xiv
ABSTRACT	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	4
1.3. Rumusan Masalah	4
1.4. Tujuan Penelitian	5
1.5. Manfaat Penelitian	5
1.6. Tinjauan Pustaka	6
1.7. Metode Penelitian	7
1.8. Sistematika Penulisan	8
II DASAR TEORI	9
2.1. Dasar-dasar Analisis Real	9

2.2. Ruang Bernorma	18
2.3. Ruang Inner Produk	21
III HUBUNGAN KETAKSAMAAN SEGITIGA DAN KETAKSAMAAN CAUCHY-SCHWARZ MENGGUNAKAN SEMI INNER PRODUK TA- PIA	31
3.1. Ketaksamaan yang dibangun oleh Ketaksamaan Segitiga	31
3.2. Semi Inner Produk Tapia	41
IV PENUTUP	58
4.1. Kesimpulan	58
4.2. Saran	59
DAFTAR PUSTAKA	59

DAFTAR GAMBAR

1.1 Proses Penelitian	8
---------------------------------	---



DAFTAR LAMBANG

\mathbb{N}	: himpunan semua bilangan asli
\mathbb{R}	: himpunan semua bilangan real
\mathbb{R}^+	: himpunan semua bilangan real non-negatif
$\overline{\mathbb{R}}$: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ atau $[-\infty, \infty]$
\mathbb{C}	: himpunan semua bilangan kompleks
■	: akhir suatu bukti
$\alpha[x, y]$: jarak sudut atau jarak Clarkson antara x dan y
$\beta[x, y]$: jarak sudut kemiringan antara x dan y
$\ \cdot\ $: norma
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: inner produk
$[\cdot, \cdot]_T$: semi inner produk Tapia
\Leftrightarrow	: jika dan hanya jika
$ p $: nilai mutlak dari p
$C[a, b]$: fungsi kontinu pada $[a, b]$
$\vec{0}$: vektor nol
\bar{z}	: konjugat bilangan kompleks

INTISARI

HUBUNGAN KETAKSAMAAN SEGITIGA DAN KETAKSAMAAN CAUCHY-SCHWARZ MENGGUNAKAN SEMI INNER PRODUK TAPIA

Oleh

Silvia Rachmawati

20106010040

Ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz telah banyak dikembangkan oleh para peneliti khususnya di bidang matematika analisis. Skripsi ini membahas beberapa ketaksamaan yang diperoleh dari ketaksamaan segitiga di ruang bernorma. Ketaksamaan tersebut merupakan bentuk lain dari jarak Clarkson dan bentuk khusus dari ketaksamaan Maligranda. Peranan semi inner produk Tapia dalam mendapatkan ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang bernorma dibahas pula dalam skripsi ini. Hasil tersebut digunakan untuk menganalisis hubungan ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang inner produk. Selain itu, semi inner produk Tapia juga berperan dalam membentuk suatu representasi lain dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang inner produk.

Kata kunci : ketaksamaan Cauchy-Schwarz, ketaksamaan segitiga, ruang bernorma, ruang inner produk, semi inner produk Tapia.

ABSTRACT

JUDUL SKRIPSI DALAM BAHASA INGGRIS

By

Silvia Rachmawati

20106010040

Triangle inequality and Cauchy-Schwarz inequality have been developed by many researchers especially in the aspect of analytical mathematics. This thesis discusses some inequalities obtained from the triangle inequality in normed spaces. The results obtain two inequalities which are another form of the Clarkson distance and a special form of the Maligranda inequality. The role of Tapia's semi inner product in obtaining the Cauchy-Schwarz inequality in normed spaces is also presented in this thesis. The results are used to analyze the relationship between triangle inequality and Cauchy-Schwarz inequality in inner product spaces. In addition, Tapia's semi inner product also contributes to form another representation of the Cauchy-Schwarz inequality in inner product spaces.

Keyword : Cauchy-Schwarz inequality, inner product space, normed space, Tapia semi inner product, triangle inequality.

SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Setiap manusia diciptakan Allah Subhanahu wa Ta'ala dengan diberikan akal agar dapat berpikir atas karunia yang diturunkan-Nya. Banyak kandungan ayat al-Qur'an yang berisi tentang perintah agar manusia menggunakan akalnya sebagai sarana untuk berpikir. Sebagaimana firman Allah Subhanahu wa Ta'ala dalam QS. *Ali 'Imran* ayat 190 yang berbunyi:

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَأَخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي
الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾

Artinya: “Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal.”

Berdasarkan QS. *Ali Imran* ayat 190 tersebut apabila dikaitkan dengan pembahasan dalam matematis, berpikir adalah kata lain dari proses penalaran. Salah satu cabang ilmu di matematika adalah analisis. Analisis matematika lebih menekankan pada pengembangan konsep dasar dan teori sehingga proses penalaran penting digunakan untuk memperoleh prinsip-prinsip yang berupa definisi, aksioma, teorema serta pembuktiannya.

Ilmu matematika sangat berperan di segala bidang ilmu dalam kehidupan, bahkan sering disebut sebagai “Ratu Ilmu”. Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, ilmu matematika juga banyak mengalami perkembangan khususnya matematika analisis fungsional. Salah satu topik yang banyak mengalami perkembangan

dalam analisis fungsional adalah topik tentang ruang bernorma. Ruang bernorma merupakan ruang vektor atas lapangan real atau kompleks. Ruang vektor atas suatu lapangan merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan pada vektor dan pergandaan skalar serta memenuhi beberapa aksioma. Setiap vektor memiliki panjang vektor yang disebut dengan norma. Norma merupakan fungsi bernilai real yang didefinisikan pada sebuah ruang vektor sedemikian sehingga memiliki sifat seperti jarak, yaitu non-negatif, definit positif, homogenitas positif, dan berlaku ketaksamaan segitiga. Selanjutnya, himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu norma disebut ruang bernorma.

Ketika dua vektor bersifat ortogonal, maka dalam beberapa hal keduanya bersifat tegak lurus. Namun secara geometri, apabila ruang vektor berdimensi tak hingga yang elemen-elemennya merupakan fungsi akan sulit terlihat. Oleh karena itu dibutuhkan suatu gagasan yang lebih abstrak tentang ortogonalitas. Konsep tersebut dapat dinyatakan dalam bahasan teori hasil kali dalam/inner produk. Konsep inner produk pada suatu ruang vektor dikenalkan pertama kali oleh Giuseppe Peano tahun 1898. Ruang inner produk atau dikenal juga dengan ruang *pre-Hilbert* merupakan suatu ruang yang dilengkapi sebuah struktur yang dinamakan inner produk. Inner produk adalah fungsi yang memetakan pasangan vektor ke besaran skalar. Apabila norma sebuah vektor adalah akar kuadrat dari hasil kali dalam vektor itu sendiri maka ruang tersebut menjadi ruang inner produk (ruang hasil kali dalam).

Salah satu pembahasan yang penting dalam ruang inner produk terkait ketaksamaan adalah ketaksamaan Cauchy-Schwarz. Ketaksamaan ini dikenal juga sebagai ketaksamaan *Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz*, ketaksamaan untuk penjumlahan dikenalkan oleh *Augustin-Louis Cauchy* pada tahun 1821, sedangkan ketaksamaan untuk integral ditunjukkan pertama kali oleh Viktor Bunyakovsky pada tahun

1859 dan Herman Amandous Schwarz, membuktikan versi integral ini dengan cara berbeda.

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz menyatakan bahwa untuk setiap vektor u dan v di ruang inner produk berlaku

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle, \quad (1.1)$$

dengan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ merupakan inner produk. Berdasarkan hal tersebut dapat didefinisikan norma dari vektor u yaitu

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Oleh karena itu, $\|u\|^2 := \langle u, u \rangle$ dengan $\langle u, u \rangle$ selalu bernilai non-negatif. Apabila Ketaksamaan 1.1 diakarkan maka diperoleh

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|. \quad (1.2)$$

Ketaksamaan 1.2 lebih populer dibandingkan Ketaksamaan 1.1, lebih lanjut ketaksamaan ini dikenal dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz. Teori tersebut mengalami banyak perkembangan bahkan dapat dimodifikasi di berbagai ruang, salah satunya di ruang bernorma. Menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan sifat-sifat inner produk diperoleh suatu ketaksamaan yang disebut ketaksamaan segitiga. Bentuk ketaksamaan segitiga dihasilkan menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan sifat hasil kali dalam, yaitu untuk setiap u, v anggota ruang bernorma X berlaku:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan ketaksamaan segitiga mengalami banyak perkembangan, yang terbaru adalah dengan memodifikasi norma menggunakan suatu inner produk yang disebut sebagai semi inner produk. Semi inner produk

Tapia pertama kali dikenalkan oleh Tapia pada tahun 1973. Tapia mendefinisikan semi inner produk tersebut dengan memanfaatkan derivative Gateaux yang memenuhi aksioma-aksioma semi inner produk Tapia.

Topik tentang Ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan ketaksamaan segitiga dengan menggunakan semi inner produk Tapia merupakan pengetahuan yang relatif baru (mulai dikenalkan oleh Muncetele tahun 2020). Oleh karena itu, berdasarkan konstruksi yang telah dilakukan oleh Muncetele dkk, peneliti tertarik untuk membahas hal tersebut secara terperinci dan sistematis dalam memahami konsep atau teorema-teorema yang diberikan.

1.2. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penulisan skripsi sangat penting agar pembahasan dapat fokus dan terarah sesuai tujuan yang dimaksud. Berdasarkan latar belakang di atas, skripsi ini akan membahas beberapa estimasi ketaksamaan segitiga diruang bernorma atas lapangan bilangan real. Selanjutnya dibahas pula beberapa pengembangan ketaksamaan Cauchy-Schwarz yang diperumum menggunakan semi inner produk Tapia. Pada pembahasan dalam skripsi ini, ruang bernorma yang dimaksud adalah ruang vektor bernorma atas lapangan bilangan real. Dilain pihak, pada pembahasan ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang inner produk, ruang yang dimaksud adalah ruang inner produk atas bilangan kompleks.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana peranan ketaksamaan segitiga untuk membangun suatu ketaksa-

maan baru di ruang bernorma?

2. Bagaimana peranan semi inner produk Tapia dalam membentuk ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang bernorma?
3. Bagaimana hubungan ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang inner produk atas bilangan kompleks?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis peranan ketaksamaan segitiga untuk membangun suatu ketaksamaan baru di ruang bernorma.
2. Menganalisis peranan semi inner produk Tapia dalam membentuk ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang bernorma.
3. Menganalisis hubungan ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang inner produk atas bilangan kompleks.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan tentang peranan ketaksamaan segitiga untuk membangun suatu ketaksamaan baru di ruang bernorma serta langkah-langkah pembuktian.
2. Memberikan uraian peranan semi inner produk Tapia dalam membentuk ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang bernorma.

3. Memberikan bahan literatur sebagai kajian lebih lanjut untuk pembaca agar termotivasi mempelajari hubungan ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz.

1.6. Tinjauan Pustaka

Acuan yang digunakan dalam penulisan skripsi ini bersumber dari buku, makalah, jurnal, dan skripsi. Konsep ketaksamaan Cauchy-Schwarz dalam ruang inner produk kompleks dikembangkan oleh Cauchy 1992. Selanjutnya Aldaz 2009, dan Dragomir 2005 membahas lebih lanjut sifat-sifat ketaksamaan Cauchy-Schwarz dalam kasus kompleks.

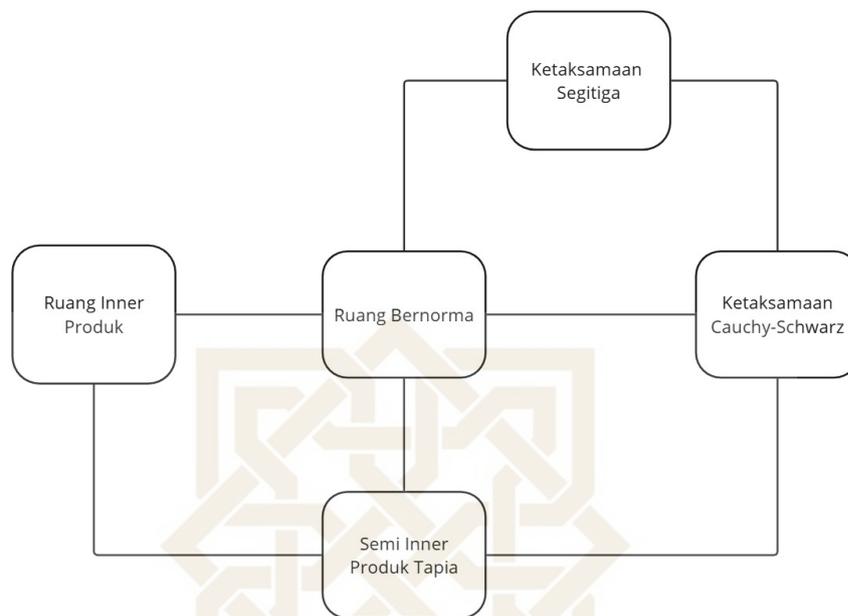
Selain ketaksamaan Cauchy-Schwarz, ketaksamaan lainnya yang cukup populer adalah ketaksamaan segitiga. Perkembangan ketaksamaan segitiga sudah banyak dikembangkan oleh para matematikawan. Maligranda 2008 mengembangkan sifat-sifat ketaksamaan segitiga di ruang bernorma. Pečarić & Rajić 2013 mengkarakterisasi dan memperumum sifat-sifat ketaksamaan segitiga di ruang bernorma. Dadipour et al, 2012 mengembangkan ketaksamaan segitiga di ruang bernorma \mathbb{R}^n . Selanjutnya Minculete & Păltănea 2017 membahas ketaksamaan segitiga menggunakan konsep semi inner produk Tapia dan integral.

Penulisan skripsi ini mengacu pada literatur utama yang ditulis oleh Minculete dan Reza Moradi dengan judul “*Some Improvements of the Cauchy-Schwarz Inequality Using the Tapia Semi-Inner-Product*” tahun 2020. Minculete & Moradi 2020 mengenalkan ketaksamaan Cauchy-Schwarz dengan memanfaatkan semi inner produk Tapia serta sifat-sifatnya. Artikel ini menarik untuk dibahas, sebab pembahasannya menggunakan konsep semi inner produk lain yaitu semi inner produk Tapia. Merujuk pada literatur utama tersebut, skripsi ini akan membahas hubungan

ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz menggunakan semi inner produk Tapia. Selanjutnya akan dijelaskan secara terperinci bentuk ketaksamaan lain yang diperoleh dari ketaksamaan segitiga.

1.7. Metode Penelitian

Penyusunan skripsi ini menggunakan metode studi literatur. Mulai dari mempelajari konsep-konsep dasar bilangan real dan bilangan kompleks. Konsep-konsep dasar tersebut digunakan dalam memahami konsep dan sifat-sifat ruang bernorma, ruang inner produk. Lebih lanjut, skripsi ini juga menggunakan pendekatan secara ilmiah yang bersifat kualitatif, yaitu secara eksplisit menuangkan pendapat dan ide-ide berupa gagasan dalam bentuk contoh dan melengkapi pembuktian. Oleh karena itu, penelitian ini diawali dengan mempelajari dasar-dasar analisis real, ruang bernorma, dan ruang inner produk. Setelah bekal dianggap cukup, selanjutnya penelitian ini memaparkan konsep dan beberapa sifat semi inner produk Tapia. Kemudian konsep tersebut digunakan dalam menjelaskan beberapa estimasi ketaksamaan segitiga dalam ruang bernorma atas lapangan bilangan real. Hasil itu digunakan untuk mempelajari beberapa konsep ketaksamaan Cauchy-Schwarz yang dibangun dengan memanfaatkan konsep semi inner produk Tapia. Rujukan utama dalam membahas skripsi ini adalah jurnal (Minculete & Moradi 2020). Beberapa langkah pembuktian teorema tidak dijelaskan pada jurnal tersebut. Oleh sebab itu, perlu pembuktian secara detail dan sistematis menggunakan rujukan baik jurnal-jurnal maupun buku-buku pendukung lainnya yang saling berhubungan. Hal ini diharapkan agar tidak ada keraguan dalam memahaminya. Berikut ini bagan proses penelitian yaitu



Gambar 1.1 Proses Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab. Pada bab satu ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan. Pada bab dua ini mempelajari konsep-konsep sebagai landasan teori dalam penyusunan skripsi ini. Berikut ini konsep-konsep sebagai landasan teori diantaranya dasar analisis real, definisi dan sifat-sifat ruang bernorma, definisi ruang inner produk dan sifat-sifatnya serta hubungan norma dengan inner produk. Selanjutnya pembahasan bab tiga ini akan menjelaskan definisi dan sifat-sifat semi inner produk Tapia dengan langkah-langkah pembuktiannya. Terakhir bab empat ini berisikan kesimpulan dan saran terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Ketaksamaan segitiga di ruang bernorma sangat berperan dalam menghasilkan ketaksamaan baru. Diperoleh dua bentuk ketaksamaan yang dibangun dari ketaksamaan segitiga tersebut. Ketaksamaan pertama mengakibatkan suatu ketaksamaan yang baru sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk ketaksamaan yang melibatkan nilai maksimum dan minimum. Selanjutnya ketaksamaan ini dapat dinyatakan lain dengan memanfaatkan jarak sudut (*angular distance*) dan jarak kemiringan sudut (*skew angular distance*). Ketaksamaan kedua yang dihasilkan merupakan bentuk lain dari jarak Clarkson dan bentuk khusus dari ketaksamaan Maligranda.

Semi inner produk yang didefinisikan oleh Tapia atau secara singkat semi inner produk Tapia sangat berperan dalam membentuk suatu representasi lain dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang inner produk. Proses dalam pembentukan ketaksamaan tersebut tidak lepas dari sifat-sifat semi inner produk Tapia serta ketaksamaan yang telah dihasilkan sebelumnya. Selain itu juga diperoleh ketaksamaan baru yang merupakan karakterisasi antara ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, dengan mengasumsikan bahwa nilai inner produknya sama dengan nilai semi inner produk Tapia.

Menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz di ruang inner produk atas bilangan kompleks dan norma yang dibangun oleh inner produk tersebut, diperoleh dua ketaksamaan baru. Ketaksamaan pertama merupakan karakterisasi dari ketak-

samaan segitiga di ruang bernorma yang dinyatakan dengan menggunakan bagian real dari inner produk. Sedangkan ketaksamaan kedua diperoleh dengan menggunakan sifat-sifat inner produk serta norma dan memanfaatkan hasil pada bagian sebelumnya sehingga terlihat hubungan antara ketaksamaan segitiga dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz.

4.2. Saran

Berdasarkan proses penelitian penulis, saran yang dapat penulis berikan:

- 1) Skripsi ini hanya mempelajari hubungan ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz yang dibangun oleh semi inner produk Tapia di ruang bernorma dan ruang inner produk. Oleh karena itu, perlu dikembangkan lagi di ruang lainnya pada analisis fungsional.
- 2) Skripsi ini hanya mempelajari ketaksamaan Cauchy-Schwarz menggunakan semi inner produk Tapia sehingga penelitian ini dapat dikembangkan lagi pada ketaksamaan lainnya.
- 3) Skripsi ini belum memuat contoh-contoh untuk memberikan ilustrasi setiap teorema pada pembahasan. Oleh karena itu, disarankan peneliti selanjutnya menyajikan contoh tersebut.

Demikian kesimpulan dan saran dalam skripsi ini. Semoga tugas akhir ini dapat menginspirasi dan memberikan manfaat kepada pembaca untuk lebih lanjut mengembangkan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Aldaz, J. (2009). Strengthened cauchy-schwarz and hölder inequalities. *J. Inequal. Pure Appl. Math*, 10(4):116.
- Berberian, S. K. (1999). *Introduction to Hilbert space*, volume 287. American Mathematical Soc.
- Cauchy, A. L. B. (1992). Cours d'analyse de l'école royale polytechnique.
- Clarkson, J. A. (1936). Uniformly convex spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 40(3):396–414.
- Dadipour, F., Moslehian, M. S., Rassias, J. M., & Takahasi, S.-E. (2012). Characterization of a generalized triangle inequality in normed spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(2):735–741.
- Darmawijaya, P. D. S. (2007). *Analisis Abstrak*. Yogyakarta: Jurusan Matematika FMIPA UGM.
- Dehghan, H. (2013). A characterization of inner product spaces related to the skew-angular distance. *arXiv preprint arXiv:1301.1001*.
- Dragomir, S. S. (2005). A potpourri of schwarz related inequalities in inner product spaces. *arXiv preprint math/0501129*.
- Heil, C. (2018). *Metrics, Norms, Inner Products, and Operator Theory*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Springer International Publishing; Birkhäuser, 1st ed. edition, ISBN: 978-3-319-65321-1; 978-3-319-65322-8,

<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=0a9bc5d4909d2d40b43912c5e7bd071f>.

Maligranda, L. (2008). Some remarks on the triangle inequality for norms. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 2(2):31–41.

Minculete, N. & Moradi, H. R. (2020). Some improvements of the cauchy-schwarz inequality using the tapia semi-inner-product. *Mathematics*, 8(12):2112.

Minculete, N. & Păltănea, R. (2017). Improved estimates for the triangle inequality. *Journal of Inequalities and Applications*, 2017:1–12.

Pečarić, J. & Rajić, R. (2007). The dunkl-williams inequality with n elements in normed linear spaces. *Mathematical inequalities & applications*, 10(2):461–470.

Pečarić, J. & Rajić, R. (2013). On some generalized norm triangle inequalities. *Rad Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti. Matematičke znanosti*, (515= 17):43–52.

Robert G. Bartle, D. R. S. (2011). *Introduction to Real Analysis*. Wiley, 4 edition, ISBN: 9780471433316, 0471433314, <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=14aa6a01f6b8d83c78b6856808411d0d>.

Tapia, R. (1973). A characterization of inner product spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 41(2):569–574.