

**SKRIPSI**

**ANALISIS KETERBATASAN OPERATOR BESEL-RIESZ DI  
RUANG LEBESGUE YANG TERDEFINISI PADA RUANG  
METRIK UKURAN**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA**

**2025**

# **ANALISIS KETERBATASAN OPERATOR BESSEL-RIESZ DI RUANG LEBESGUE YANG TERDEFINISI PADA RUANG METRIK UKURAN**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan  
mencapai derajat Sarjana S-1  
Program Studi Matematika



Kepada  
PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

2025



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Awal Febriantono

NIM : 20106010050

Judul Skripsi : Analisis Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue  
yang terdefinisi pada ruang Metrik Ukuran

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
**YOGYAKARTA**

Yogyakarta, 19 Januari 2025

Pembimbing

Malahayati, S.Si., M.Sc

NIP. 19840412 201101 2 010



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta  
di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Awal Febriantono

NIM : 20106010050

Judul Skripsi : Analisis Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue  
yang terdefinisi pada ruang Metrik Ukuran

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 19 Januari 2025

Pembimbing

Aulia Khifah Futhona, M.Sc.

NIP. 19920605 201903 2 021



KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

## PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-206/Un.02/DST/PP.00.9/01/2025

Tugas Akhir dengan judul : Analisis Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : AWAL FEBRIANTONO  
Nomor Induk Mahasiswa : 20106010050  
Telah diujikan pada : Jumat, 24 Januari 2025  
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

### TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Malahayati, S.Si., M.Sc

SIGNED

Valid ID: 6794ab86a690e



Pengaji I

Aulia Khifah Futhona, M.Sc.

SIGNED

Valid ID: 679ada44a78f4



Pengaji II

Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc.

SIGNED

Valid ID: 6794edd708144



Yogyakarta, 24 Januari 2025

UIN Sunan Kalijaga

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

SIGNED

Valid ID: 679b23a545708

## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Awal Febriantono

NIM : 20106010050

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 20 Januari 2025

Awal Febriantono

## HALAMAN PERSEMBAHAN



Karya ini dipersembahkan untuk Mamak, Bapak, dan  
almamater penulis, UIN Sunan Kalijaga.

## HALAMAN MOTTO



Jika kamu ingin mencapai kesempurnaan dalam hal-hal besar, kamu mengembangkan kebiasaan dalam hal-hal kecil. - Pythagoras.

## PRAKATA

*Allhamdulillahirabbil'alamin*, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di Ruang Lebesgue yang terdefinisi pada Ruang Metrik Ukuran". Penulisan penelitian ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan penelitian ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* penelitian ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Ephra Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Sri Istiyarti Uswatun Chasanah, M.Si., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
4. Malahayati, S.Si., M.Sc. dan Aulia Khifah Futhona, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing penelitian yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan penelitian ini.
5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.

6. Kedua orang tua penulis, Bapak Martono dan Ibu Sukarmi, yang selalu memberikan kasih sayang, nasihat, doa tiada henti, serta kesabaran yang luar biasa dalam setiap langkah hidup penulis, yang merupakan anugrah terbesar dalam hidup.
7. Kedua kakak penulis, Ira Marrini dan Rina Lusiana Ariyanti, beserta suaminya Tri Mujianto dan Afan Fajar Saputra. Terimakasih atas support dan doa-doa tulus untuk mencapai impian.
8. Seseorang yang spesial Maulidatu Jauharoti Alisyah S.Mat., yang selalu sabar menunggu, mendengar keluh kesah, dan menemani selama proses penyusunan. Terimakasih untuk tenaga, doa, *support* sehingga penulis tidak merasa sendiri dan selalu semangat dalam menyelesaikan perkuliahan.
9. Ponakan penulis, Ayunda Eka Ramadhani (Eka Banini) dan Al-Fatih Rizki (Pateh plentong), yang selalu memnemani penulis dalam bersenda gurau.
10. Sahabat-sahabat penulis yang sedang berjuang, Sani, Erol, Sidiq, Panji, Al-fian, Bukhori, Qoyim. Setelah lulus SMK kita memilih jalan yang berbeda, semangat dan *support* yang diberikan selalu sampai dengan hangat.
11. Kakak tingkat saya mas Raka dan mas Imam, yang selalu memberikan saran dan bantuan ketikan penulis sedang kesuultan.
12. Teman-teman seperjuangan yang luar biasa, Uul, Ardit, Rido, Kamal, Aulia, dan Dhiya yang membuat masa perkuliahan lebih bermakna dan terlalu banyak bercanda.
13. Angkatan 2020 Prodi Matematika, dengan berbagai macam *persona* masing-masing. Terima kasih telah menjadi teman yang baik selama perkuliahan.

14. Teman-teman seperjuangan di organisasi, HMPS Matematika Tahun 2021 dan 2022 serta PK IMM Sains dan Teknologi yang menambah pengalaman luar biasa serta wawasan dalam perjuangan ini.
15. Semua pihak yang membantu dalam proses penelitian ini. Penulis ucapan terimakasih yang tak terhingga.

Semoga Allah SWT memberi balasan atas segala kebaikan dan keikhlasan berbagai pihak kepada penulis. Penulis menyadari penelitian ini masih banyak kekurangan dan jauh dari kata kesempurnaan. Untuk itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi menyempurnakan penelitian ini.

Akhir kata, semoga penelitian ini berguna dan bermanfaat bagi semua pihak yang membaca nya.

Yogyakarta, 20 Januari 2025

Penulis

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
**YOGYAKARTA**

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR</b>	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	<b>iv</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN</b>	<b>v</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	<b>vi</b>
<b>HALAMAN MOTTO</b>	<b>vii</b>
<b>PRAKATA</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR LAMBANG</b>	<b>xiv</b>
<b>INTISARI</b>	<b>xv</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xvi</b>
<b>I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	3
1.3. Rumusan Masalah	3
1.4. Tujuan Penelitian	3
1.5. Manfaat Penelitian	3
1.6. Tinjauan Pustaka	4
1.7. Metode Penelitian	5
1.8. Sistematika Penulisan	7
<b>II DASAR TEORI</b>	<b>9</b>
2.1. Dasar Analisis Real	9

2.2. Ruang Metrik Ukuran . . . . .	11
2.3. Ruang Lebesgue . . . . .	28
2.4. Operator . . . . .	40
<b>III PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>42</b>
3.1. Operator Bessel-Riesz . . . . .	42
3.2. Keterbatasan Operator Bessel-Riesz pada Ruang Lebesgue . . . . .	46
<b>IV PENUTUP . . . . .</b>	<b>53</b>
4.1. Kesimpulan . . . . .	53
4.2. Saran . . . . .	53
<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>Curriculum Vitae . . . . .</b>	<b>57</b>



## DAFTAR GAMBAR

1.1 Skema Metode Penelitian . . . . .	7
---------------------------------------	---



## DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{N}$	: Himpunan semua bilangan asli
$\mathbb{Z}$	: Himpunan semua bilangan bulat
$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan real
$\overline{\mathbb{R}}$	: $\mathbb{R}$ digabung dengan $-\infty$ dan $\infty$
$\mathbb{R}^+$	: Himpunan semua bilangan real positif
$\Sigma$	: Kumpulan himpunan terukur
$\mu$	: Ukuran yang terdefinisi pada aljabar sigma
$\delta$	: Fungsi Kuasimetrik
$L^p(X, \mu)$	: Kelas dari himpunan Lebesgue yang terukur pada $1 \leq p < \infty$
$X$	: Ruang metrik ukuran dengan ukuran lengkap $\mu$ dan fungsi kuasimetrik $\delta$
$G_{\alpha, \gamma}$	: Kernel Bessel-Riesz untuk $0 < \alpha < \gamma, \gamma > 0$
$G_{\alpha, \gamma}f(x)$	: Operator Bessel-Riesz untuk $0 < \alpha < \gamma, \gamma > 0$
$M_q f(x)$	: Operator maksimal Hardy-Littlewood
■	: Akhir suatu bukti
$a \sim b$	: $a \leq C_0 b$ dan $a \geq C_1 b$ , untuk $C_0, C_1 > 0$

## INTISARI

### ANALISIS KETERBATASAN OPERATOR BESSEL-RIESZ DI RUANG LEBESGUE YANG TERDEFINISI PADA RUANG METRIK UKURAN



Oleh

AWAL FEBRIANTONO

20106010050

Keterbatasan operator Bessel-Riesz telah banyak diteliti dan dikembangkan oleh para peneliti khususnya di bidang matematika analisis. Penelitian ini membahas keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran. Operator Bessel-Riesz merupakan konvolusi dari kernel Bessel-Riesz dan fungsi di ruang Lebesgue. Sebelum membuktikan keterbatasan operator Bessel-Riesz, terlebih dahulu ditunjukkan bahwa kernel Bessel-Riesz memenuhi syarat keanggotaan di ruang  $L^1$ . Selain itu, dalam pembuktianya dimanfaatkan pula keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood di ruang Lebesgue. Dengan memanfaatkan sifat keanggotaan kernel Bessel-Riesz di ruang  $L^1$  dan keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood, operator Bessel-Riesz terbatas dari  $L^p$  ke  $L^p$ . **Kata kunci** : kernel Bessel-Riesz, operator Bessel-Riesz, ruang Lebesgue, ruang metrik ukuran

## ABSTRACT

### ANALYSIS OF THE BOUNDEDNESS OF BESSEL-RIESZ OPERATORS IN LEBESGUE SPACES DEFINED ON METRIC MEASURE SPACES

By

AWAL FEBRIANTONO

20106010050

The limitations of the Bessel-Riesz operator have been extensively studied and developed by researchers, particularly in the field of mathematical analysis. This research examines the boundedness of the Bessel-Riesz operator in Lebesgue spaces defined on metric measure spaces. The Bessel-Riesz operator is a convolution of the Bessel-Riesz kernel and functions in Lebesgue spaces. Before proving the boundedness of the Bessel-Riesz operator, it is first shown that the Bessel-Riesz kernel satisfies the membership condition in the  $L^1$  space. Furthermore, the proof also utilizes the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator in Lebesgue spaces. By leveraging the membership property of the Bessel-Riesz kernel in the  $L^1$  space and the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator, the Bessel-Riesz operator is shown to be bounded from  $L^p$  to  $L^p$ .

**Keyword** :Bessel-Riesz kernel, Bessel-Riesz operator, Lebesgue spaces, Metric measure spaces

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1. Latar Belakang Masalah

Analisis Fungsional merupakan salah satu bagian yang menarik dalam konseptrasi analisis pada bidang matematika. Diantara topik yang banyak dibahas oleh para peneliti adalah konsep tentang operator. Operator merupakan suatu pemetaan atau fungsi yang bertindak pada elemen-elemen suatu ruang untuk menghasilkan elemen-elemen dari suatu ruang yang baru. Operator memiliki sifat-sifat penting seperti sifat keterbatasan, kompak, dan memiliki derajat tertentu dalam regularitasnya. Salah satu operator yang diteliti baru-baru ini adalah operator Bessel-Riesz.

Operator Bessel-Riesz adalah jenis operator integral singular yang bekerja pada suatu fungsi dengan mengkonvolusikannya dengan kernel Bessel-Riesz. Operator ini didefinisikan dalam ruang metrik dan sangat berguna dalam studi tentang ruang ukuran. Studi tentang operator Bessel-Riesz merupakan alat yang fundamental dalam analisis harmonik dan memiliki aplikasi dalam bidang matematika lainnya seperti persamaan diferensial parsial dan analisis kompleks (Eridani (2023)). Penelitian telah dilakukan untuk mengkaji keterbatasan operator Bessel-Riesz di dalam suatu ruang, khususnya dalam konteks ruang Lebesgue dan ruang Morrey (Idris et al. (2016)).

Ruang Lebesgue merupakan ruang fungsi yang menggunakan perluasan dari norm- $p$  untuk dimensi berhingga dari ruang vektor (Lebesgue (1902)). Nama dari Lebesgue diambil dari seorang matematikawan prancis yang bernama Henry

Lebesgue. Hal yang memotivasi adanya konsep ruang lebesgue adalah konsep integral riemann, kemudian konsep tersebut digunakan dalam mendefinisikan integral lebesgue. Seiring berjalannya penelitian mengenai ruang Lebesgue, pada tahun 1938 C.B. Morrey memperkenalkan perumuman dari ruang Lebesgue yaitu ruang Morrey. Ruang Morrey sering dijumpai ketika mempelajari operator Schrodinger dan teori potensial. Penelitian mengenai ruang Morrey telah banyak dilakukan, salah satunya keterbatasan operator di ruang Morrey.

Penelitian tentang keterbatasan operator Bessel-Riesz dalam ruang metrik ukuran baru-baru ini diteliti oleh Mehmood dkk. (2023). Ruang metrik merupakan himpunan dengan fungsi metrik yang mendefinisikan jarak antara elemen-elemen himpunan. Penelitian ruang metrik telah banyak dikembangkan oleh para peneliti, salah satu yang digunakan pada penelitian Mehmood dkk. (2023) yaitu ruang metrik ukuran. Ruang metrik ukuran adalah ruang metrik yang dilengkapi dengan ukuran lengkap  $\mu$ . Penggunaan ruang metrik ukuran pada penelitian ini digunakan sebagai definisi di operator Bessel-Riesz.

Penelitian dari Mehmood dkk. (2023) sangat menarik, sebab meneliti tentang keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue dan ruang Morrey yang terdefinisi dalam ruang metrik ukuran. Untuk meneliti keterbatasan dari operator Bessel-Riesz ini dekomposisi diadik sederhana dan operator maksimal diterapkan dalam pembuktianya. Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik untuk menganalisis keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue dan ruang Morrey yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran. Tidak hanya karena penelitian ini merupakan penelitian yang baru, tetapi operator ini sangat berguna sebagai alat yang fundamental dalam analisis harmonik. Juga memiliki aplikasi dalam bidang matematika seperti persamaan differensial parsial dan analisis komplek.

## **1.2. Batasan Masalah**

Adanya batasan masalah pada penelitian ini diperlukan untuk menghindari pembahasan yang meluas dari topik utama. Penelitian ini akan membuktikan keterbatasan operator Bessel-Riesz pada ruang Lebesgue  $L^p$  ke  $L^p$  yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran, untuk kernel Bessel-Riesz anggota  $L^1$ . Oleh karena itu dalam penelitian ini tidak akan menyajikan hasil-hasil diluar semesta pembicaraan yang disebutkan diatas.

## **1.3. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana analisis keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran?

## **1.4. Tujuan Penelitian**

Tujuan penyusunan penelitian ini adalah untuk menganalisis keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran.

## **1.5. Manfaat Penelitian**

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan tentang keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran, serta disajikan langkah-langkah pembuktian secara rinci.
2. Penelitian ini diharap dapat dijadikan sebagai salah satu referensi untuk dapat

dikaji lebih lanjut, sehingga mampu menjadi motivasi bagi pembaca untuk mempelajari perkembangan dari operator Bessel-Riesz dan ruang Lebesgue.

### **1.6. Tinjauan Pustaka**

Ruang Lebesgue pertama kali diperkenalkan oleh Henri Lebesgue pada tahun 1902 pada penelitiannya yang berjudul "*Intégrale, Longueur, Aire*". Kemudian pada tahun 1938 C.B. Morrey memperkenalkan perumuman dari ruang Lebesgue yang selanjutnya disebut sebagai ruang Morrey, dari penelitian yang berjudul "*On the Solutions of Quasi Linear Elliptic Partial Differential Equations*". Penelitian mengenai ruang Lebesgue dan ruang Morrey telah banyak dilakukan. Salah satu dari sekian penelitiannya merupakan penelitian keterbatasan operator di ruang Lebesgue ataupun di ruang Morrey.

Operator integral fraksional merupakan salah satu operator yang diteliti keterbatasannya pada ruang Lebesgue dan ruang Morrey. Kurata dkk. (2000) telah meneliti keterbatasan operator integral fraksional di ruang Morrey beserta aplikasinya di dalam persamaan schrodinger. Selanjutnya, Eridani dkk. (2009) meneliti keterbatasan operator integral fraksional di ruang Lebesgue dan ruang Morrey. Bukti yang didapat dari penelitian tersebut, operator integral fraksional terkendala dalam ruang Morrey berbobot di ruang ukuran kuasimetrik. Setelah itu, keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Lebesgue dan ruang Morrey telah dibuktikan oleh Idris dkk. (2016). Gürbüz (2017) juga telah membuktikan keterbatasan operator integral fraksional di ruang Morrey yang diperumum.

Selain operator integral fraksional, terdapat operator Bessel-Riesz yang diteliti keterbatasannya pada ruang Lebesgue dan ruang Morrey. Penelitian dari M. Idris dkk. (2016) telah membuktikan keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang

Lebesgue dan ruang Morrey. Selanjutnya operator Bessel-Riesz kembali diteliti pada tahun 2021 oleh Mehmood dan Eridani, penelitian ini mengembangkan penelitian dari M. Idris dkk. (2016) dengan membahas keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue berbobot dan ruang Morrey berbobot. Lalu pada tahun 2023 Mehmood dan Eridani kembali kembali mengembangkan penelitian sebelumnya dengan meneliti keterbatasan operator Bessel-Riesz pada kasus khusus di ketaksamaan Young. Pada tahun yang sama Mehmood dkk. mengembangkan penelitian-penelitian sebelumnya, yaitu mengembangkan operator Bessel-Riesz dengan mendefinisikannya di ruang metrik ukuran. Penelitian yang ditulis Mehmood dkk. (2023) inilah yang akan digunakan sebagai rujukan utama dalam penulisan penelitian ini.

Selain mengacu pada literatur diatas, penelitian ini menggunakan hasil penelitian sebelumnya. Penelitian dari M. Fandi Ansori (2016) yang berjudul "*Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di Ruang Lebesgue*". Penelitian tersebut mengkaji keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue.

Penelitian ini juga menggunakan beberapa rujukan pendamping yaitu buku yang berjudul "*Real Analysis, fourth edition*" karya H.L. Royden dan P.M. Fitzpatrick tahun 1970 serta "*Morrey Spaces*" karya David R. Adams tahun 2015. Dua rujukan tersebut merupakan rujukan yang mempermudah penelitian ini dalam pemahaman dalam teori ukuran serta ruang Morrey.

### **1.7. Metode Penelitian**

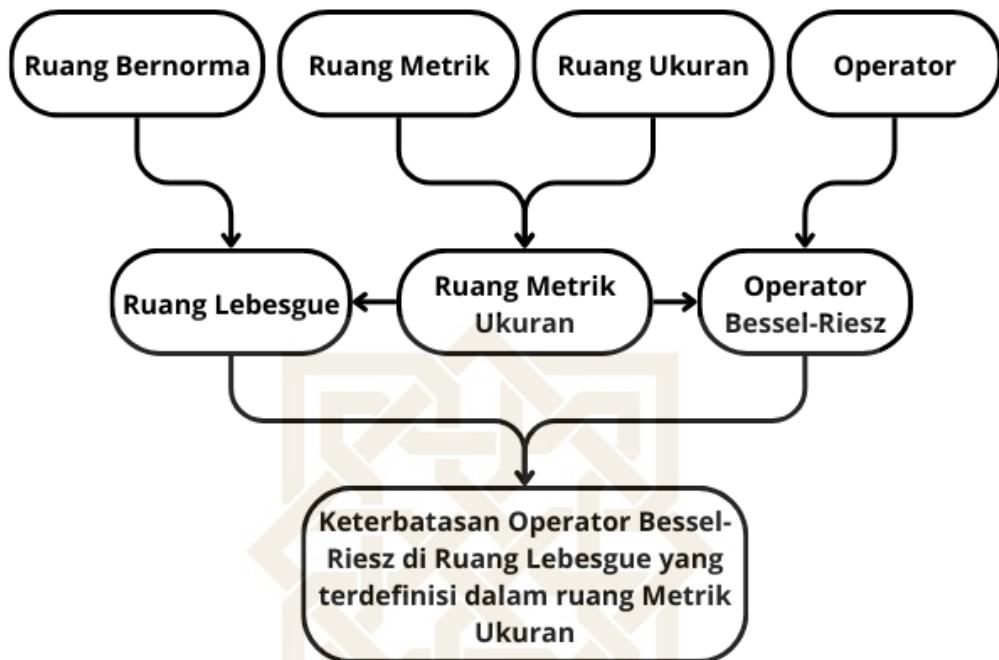
Pada penulisan penelitian ini, menggunakan metode studi literatur. Metode ini memberikan pemahaman terkait sumber-sumber yang berkaitan dengan penelitian, khususnya terkait keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran. Selanjutnya pada penelitian ini diterapkan

metode ilmiah yang bersifat kualitatif, di mana segala pendapat dan penilaian ditampilkkan secara jelas dan tidak rumit. Metode ini diharap dapat memberikan dukungan maksimal dalam pengembangan pembahasan.

Penelitian dimulai dengan pembahasan dasar teori, melibatkan konsep teori ukuran. Pembahasan dilanjutkan dengan mempelajari ruang-ruang yang digunakan beserta sifat-sifatnya diantaranya ruang metrik dan ruang Lebesgue. Selanjutnya penelitian dilanjut pada operator Bessel-Riesz dan operator Maksimal Hardy-Littlewood. Informasi dasar teori diperoleh dari buku dan artikel yang menjadi sumber rujukan, dan pemahaman ini akan mendukung kelancaran pembahasan selanjutnya.

Inti dari penelitian ini terfokus pada keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran. Pembahasan mengenai hal tersebut diuraikan dengan menjelaskan setiap langkah pembuktian secara terperinci yang terkait dengan keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran, dengan merujuk pada jurnal (Mehmood et al. (2023b)) sebagai sumber rujukan utama.

Dalam rangka meningkatkan kejelasan dan memudahkan pemahaman, akan diberikan skema mengenai alur penelitian yang akan dibahas. Tujuannya untuk memberikan pandangan umum kepada pembaca mengenai struktur dan jalannya penelitian. Skema sebagai berikut:



Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian

### 1.8. Sistematika Penulisan

Penulis membagi sistematika penulisan menjadi empat bab. Bab pertama mencakup latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab dua menyajikan dasar-dasar teori untuk mempermudah dalam pahaman terhadap pembahasan yang akan diuraikan pada bab-bab selanjutnya. Bab ini menjelaskan dasar-dasar dari analisis real, ruang terukur, ruang metrik, ruang Lebesgue, serta sifat-sifat yang berlaku didalam ruang-ruang tersebut.

Bab tiga membahas analisis keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran. Penyajian dalam bab ini mengandung beberapa teorema, selanjutnya teorema-teorema tersebut akan dibuktikan

secara terperinci dengan menyertakan konsep dasar yang telah dibahas pada bab sebelumnya.

Bab empat merupakan penutup yang berisikan tentang kesimpulan dari pembahasan bab-bab sebelumnya dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian selanjutnya.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1. Kesimpulan

Pembahasan terkait keterbatasan operator Bessel-Riesz yang terdefinisi dalam ruang Metrik Ukuran pada ruang Lebesgue telah dijelaskan pada bab sebelumnya. Beberapa teori dasar sangat diperlukan dalam pembuktian keterbatasan ini. Seperti dasar dari teori ukuran yang sangat berguna untuk mendefinisikan ruang-ruang yang diperlukan dalam penelitian ini. Seperti definisi ruang metrik ukuran dan ruang Lebesgue  $L^p$ . Lalu dijelaskan dasar-dasar dari operator yang tentunya juga merupakan inti dari penelitian terkait keterbatasan sebuah operator.

Pembuktian keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue yang terdefinisi pada ruang metrik ukuran melibatkan beberapa teorema. Teorema 3.1.6 menunjukkan bahwa kernel Bessel-Riesz  $G_{\alpha,\gamma}$  merupakan anggota ruang Lebesgue  $L^1$ . Ketaksamaan Holder juga berperan penting dalam menyederhanakan pertidaksamaan pada pembuktian keterbatasan ini. Proses akhir dalam pembuktian, melibatkan sifat keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood di ruang Lebesgue. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3.2.1, operator Bessel-Riesz terbatas di ruang Lebesgue  $L^p$  ke  $L^p$ .

#### 4.2. Saran

Berdasarkan pembahasan di atas, disarankan untuk dapat melanjutkan penelitian ini yaitu, analisis keterbatasan operator Bessel-Riesz yang terdefinisi dalam

ruang Metrik Ukuran pada ruang Lebesgue  $L^p$  ke  $L^p$  untuk kasus kernel Bessel-Riesz anggota ruang Lebesgue  $L^p$ . Disarankan juga dapat meneliti keterbatasan operator Bessel-Riesz ini pada ruang-ruang yang lebih umum daripada ruang Lebesgue, seperti ruang Morrey atau ruang Campanato.



## DAFTAR PUSTAKA

Adams, D. R. (2015). *Morrey spaces*. Springer.

Ansori, M. F. (2016). Keterbatasan operator bessel-riesz di ruang lebesgue.

Bartle, R. & Sherbert, D. (2011). *Introduction to Real Analysis*. Wiley, ISBN: 9781118135860.

Bartle, R. G. (2014). *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons.

Eridani (2023). Operator bessel-riesz pada ruang lebesgue dan ruang morrey yang terdefinisi dalam ruang metrik ukuran. <https://unair.ac.id/operator-bessel-riesz-pada-ruang-lebesgue-dan-ruang-morrey-yang-terdefinisi-dalam-ruang-metrik-terukur/>. diakses tanggal 3 Februari 2024.

Eridani, A., Kokilashvili, V., & Meskhi, A. (2009). Morrey spaces and fractional integral operators. *Expositiones Mathematicae*, 27(3):227–239.

Gürbüz, F. (2017). Some estimates for generalized commutators of rough fractional maximal and integral operators on generalized weighted morrey spaces. *Canadian Mathematical Bulletin*, 60(1):131–145.

Idris, M., Gunawan, H., Lindiarni, J., & Eridani (2016). The boundedness of bessel-riesz operators on morrey spaces. 1729(1):020006.

Jain, P.K dan Gupta, V. (1986). *Lebesgue Measure and Integration*. Wiley Eastern Limited.

Jones, F. (2001). *Lebesgue integration on Euclidean space*. Jones & Bartlett Learning.

Kurata, K., Nishigaki, S., & Sugano, S. (2000). Boundedness of integral operators on generalized morrey spaces and its application to schrödinger operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(4):1125–1134.

Lebesgue, H. (1902). Intégrale, longueur, aire. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1898-1922)*, 7(1):231–359.

Mehmood, S., Eridani, & Fatmawati (2021). Morrey spaces and boundedness of bessel-riesz operators. 2329(1):030001.

Mehmood, S., Eridani, & Fatmawati (2023a). The boundedness of bessel-riesz operators as a special case of youngs inequality. 2554(1):020009.

Mehmood, S., Raza, W., et al. (2023b). Bessel-riesz operators on lebesgue spaces and morrey spaces defined in measure metric spaces. *International Journal of Differential Equations*, 2023.

Morrey, C. B. (1938). On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43(1):126–166.

Royden, H. & Fitzpatrick, P. (2010). *Real Analysis, fourth edition*.

Shirali, S. & Vasudeva, H. L. (2005). *Metric spaces*. Springer Science & Business Media.