

**SKRIPSI**

**DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF HELM  
DAN GRAF HELM TERTUTUP BESERTA  
APLIKASI DIMENSI METRIK SISI**



**MUHAMMAD FAUZI NUR ROBIULTSANI**

**20106010025**

**STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA**

**YOGYAKARTA**

**2025**

**DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF HELM  
DAN GRAF HELM TERTUTUP BESERTA  
APLIKASI DIMENSI METRIK SISI**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan  
mencapai derajat Sarjana S-1  
Program Studi Matematika



diajukan oleh

**MUHAMMAD FAUZI NUR ROBIULTSANI**

**20106010025**

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA**

**YOGYAKARTA**

**2025**



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Muhammad Fauzi Nur Robiultsani

NIM : 20106010025

Judul Skripsi : *Dimensi Metrik Sisi pada Graf Helm dan Graf Helm Tertutup beserta Aplikasinya*

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Pembimbing I

Muchammad Abrori, S.Si.,M.Kom

NIP. 19720423 199903 1 003

Yogyakarta, 23 Januari 2025

Pembimbing II

Deddy Rahmadi, M.Sc.

NIP. 19930807 202203 1 001



KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

## PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-208/Un.02/DST/PP.00.9/01/2025

Tugas Akhir dengan judul : Dimensi Metrik Sisi pada Graf Helm dan Graf Helm Tertutup beserta Aplikasi Dimensi Metrik Sisi

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : MUHAMMAD FAUZI NUR ROBIULTSANI  
Nomor Induk Mahasiswa : 20106010025  
Telah diujikan pada : Jumat, 24 Januari 2025  
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

### TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom  
SIGNED

Valid ID: 67970eb8cde2a



Penguji I

Deddy Rahmadi, M.Sc.  
SIGNED

Valid ID: 679a83a53590e



Penguji II

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.  
SIGNED

Valid ID: 679aed5bce9ba



Yogyakarta, 24 Januari 2025

UIN Sunan Kalijaga  
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.  
SIGNED

Valid ID: 679b31b87eb42

## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Muhammad Fauzi Nur Robiultsani  
NIM : 20106010024  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 23 Januari 2025



MATEMATIKA  
TAMU  
No. FDAMX05734545X  
7.5

Muhammad Fauzi Nur Robiultsani

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## **HALAMAN PERSEMBAHAN**



STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
YOGYAKARTA

Karya ini penulis persembahkan untuk  
almamater penulis, keluarga penulis, dan  
orang-orang yang berharga bagi penulis.

## **HALAMAN MOTTO**



**Datang sebagai lelaki, pulang sebagai lelaki**

## PRAKATA

*Allhamdulillahirabbil'alamin*, puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Dimensi Metrik Sisi pada Graf Helm dan Graf Helm Tertutup". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Pro-



gram Studi Matematika

3. Aulia Khifah Futhona, M.Sc., selaku Dosen Penasehat Akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
4. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom. dan Deddy Rahmadi, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.
6. Orang tua yang selalu memberikan doa dan restunya serta selalu memberikan dukungan penuh dan memotivasi kepada penulis dalam penyusunan skripsi.
7. Sindi Lestari, perempuan yang selalu memberikan doa, dukungan serta memotivasi penulis dan membantu penulis dalam penyusunan skripsi.

8. Sahabat penulis dalam grup Maul Prenjon yang selalu memberikan doa dan dukungannya kepada penulis.
9. Mas Raka dan Mas Imam yang selalu memberi motivasi dan membantu penulis dalam pengerjaan skripsi.
10. Sahabat penulis dalam grup Saintek Musik yang selalu memberikan doa dan dukungannya kepada penulis.
11. Komunitas Pecinta Aljabar dan Kelompok KKN Magetan yang telah memberikan doa dan dukungan kepada penulis.
12. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi yang membacanya dan juga dapat menjadi salah satu referensi bagi penelitian selanjutnya. Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih memiliki banyak kekurangan, oleh karena itu, penulis mengharapkan adanya kritik dan saran yang membangun dalam penulisan skripsi ini.

Yogyakarta, 22 Januari 2025

Penulis



STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . .	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR . . . .	ii
HALAMAN PENGESAHAN . . . . .	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN . . . . .	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . .	v
HALAMAN MOTTO . . . . .	vi
PRAKATA . . . . .	vii
DAFTAR ISI . . . . .	xi
DAFTAR TABEL . . . . .	xiv
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xvi
DAFTAR LAMBANG . . . . .	xviii
INTISARI . . . . .	xx
ABSTRACT . . . . .	xxii
<b>I PENDAHULUAN . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2. Batasan Masalah . . . . .	5
1.3. Rumusan Masalah . . . . .	6

1.4. Tujuan Penelitian . . . . .	6
1.5. Manfaat Penelitian . . . . .	7
1.6. Tinjauan Pustaka . . . . .	8
1.7. Metode Penelitian . . . . .	9
1.8. Sistematika Penulisan . . . . .	11
<b>II DASAR TEORI . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1. Graf . . . . .	13
2.2. <i>Adjacent</i> dan <i>Incident</i> . . . . .	16
2.3. Keterhubungan . . . . .	18
2.4. Jenis-jenis graf . . . . .	20
2.5. Terminologi dasar graf . . . . .	24
2.6. Derajat Verteks . . . . .	27
2.7. Isomorfis Graf . . . . .	28
2.8. Dimensi Metrik . . . . .	29
2.9. Dimensi Metrik Sisi . . . . .	36
<b>III DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF HELM DAN GRAF HELM TERTUTUP . . . . .</b>	<b>45</b>
3.1. Karakteristik Graf Helm . . . . .	45
3.2. Karakteristik Graf Helm Tertutup . . . . .	48

3.3. Penentuan Dimensi Metrik Sisi pada Graf Helm dan Graf helm tertutup . . . . .	51
<b>IV APLIKASI PADA PENEMPATAN LOKASI DINAS PE-</b>	
<b>MADAM KEBAKARAN . . . . .</b>	<b>79</b>
4.1. Gambaran Umum Wilayah Kabupaten Bantul . .	79
4.2. Penentuan Dimensi Metrik Sisi Pada Penempatan Lokasi Pemadam Kebakaran . . . . .	83
<b>V PENUTUP . . . . .</b>	<b>88</b>
5.1. Kesimpulan . . . . .	88
5.2. Saran . . . . .	90
<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>90</b>
<b>LAMPIRAN . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>A TABEL REPRESENTASI JARAK <i>EDGE</i> TERHADAP</b>	
<b>SELURUH VERTEKS . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>Curriculum Vitae . . . . .</b>	<b>97</b>

## DAFTAR TABEL

2.1	Derajat verteks pada graf $G_4$ . . . . .	28
3.1	Tabel representasi jarak setiap edge dengan $W_E$ pada graf $H_3$ . . . . .	52
3.2	Tabel representasi jarak setiap <i>edge</i> dengan $W_E$ pada graf $H_4$ . . . . .	56
3.3	Tabel representasi setiap edge terhadap $W_E$ pada graf $H_n$ . . . . .	61
3.4	Tabel representasi jarak setiap edge dengan selu- ruh verteks di graf $CH_3$ . . . . .	64
3.5	Tabel representasi jarak setiap edge dengan selu- ruh verteks di graf $CH_4$ . . . . .	67
3.6	Tabel representasi jarak setiap edge dengan selu- ruh verteks di graf $CH_5$ . . . . .	73
3.7	Tabel representasi jarak setiap edge dengan selu- ruh verteks di graf $CH_6$ . . . . .	75
4.1	Tabel Kapanewon di Kabupaten bantul . . . . .	81

4.2	Tabel representasi jarak <i>edge</i> terhadap himpunan pembeda $W_E$ . . . . .	85
-----	---	----





## DAFTAR GAMBAR

1.1	Skema Metode Penelitian . . . . .	10
2.1	Graf $G_1$ dengan <i>edge</i> dan graf $G_2$ tanpa <i>edge</i> . .	14
2.2	Graf $G_3$ dengan <i>loop</i> dan <i>parallel</i> . . . . .	15
2.3	Graf $H_1$ . . . . .	16
2.4	Graf Terhubung $G_4$ . . . . .	17
2.5	Graf $G_3$ dengan <i>edge</i> . . . . .	19
2.6	Graf Terhubung $G_5$ . . . . .	21
2.7	Graf Komplit . . . . .	22
2.8	Graf Lingkaran . . . . .	23
2.9	Graf $P_4$ . . . . .	23
2.10	Graf $P_4$ . . . . .	24
2.11	Graf $P_4$ dengan Eksentrisitas . . . . .	25
2.12	Graf $G$ Kiri dan Graf $H$ Kanan . . . . .	29
2.13	Graf Terhubung $G_5$ . . . . .	35
2.14	Graf Terhubung $G_5$ . . . . .	43
3.1	Graf Roda $W_n$ . . . . .	46

3.2	Graf Helm $H_n$ . . . . .	47
3.3	Graf Helm Tertutup $CH_n$ . . . . .	49
3.4	Graf Helm $H_3$ . . . . .	52
3.5	Graf Helm $H_4$ . . . . .	55
3.6	Graf Helm $CH_3$ . . . . .	63
3.7	Graf Helm Tertutup $CH_4$ . . . . .	67
4.1	Peta wilayah Kabupaten Bantul . . . . .	80
4.2	Graf representasi wilayah kapanewon di Kabupa- ten Bantul . . . . .	82

## DAFTAR LAMBANG

$V$	:	himpunan verteks
$E$	:	himpunan <i>edge</i>
$v \in V$	:	$v$ anggota $V$
$n \leq a$	:	$n$ kurang dari sama dengan $a$
$K_n$	:	graf komplit dengan $n$ titik
$C_n$	:	graf lingkaran dengan $n$ titik
$P_n$	:	graf lintasan dengan $n$ titik
$V(H) \subseteq V(G)$	:	$V(H)$ himpunan bagian ( <i>subset</i> ) atau sama dengan $V(G)$
$d(u, v)$	:	jarak antara verteks $u$ dan $v$
$e(v)$	:	eksentrisitas dari verteks $v$
$rad(G)$	:	jari-jari dari graf $G$
$diam(G)$	:	diameter dari graf $G$
$N(v)$	:	persekitaran dari verteks $v$
$der(v)$	:	derajat dari verteks $v$

$G \cong H$  : graf  $G$  isomorfis dengan graf  $H$

$W$  : himpunan pembeda pada dimensi metrik

$r(v|W)$  : nilai dari verteks  $v$  terhadap himpunan pembeda

$\dim(G)$  : dimensi metrik pada graf  $G$

$W_E$  : himpunan pembeda pada dimensi metrik sisi

$r(e|W_E)$  : nilai dari edge  $e$  terhadap himpunan pembeda

$\text{edim}(G)$  : dimensi metrik sisi pada graf  $G$

$\rightarrow$  : menuju

## INTISARI

### **DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF HELM DAN GRAF HELM TERTUTUP BESERTA APLIKASI DIMENSI METRIK SISI**

Oleh

Muhammad Fauzi Nur Robiultsani

20106010025

Dimensi metrik sisi merupakan kardinalitas himpunan pembeda minimum pada suatu graf. Kumpulan verteks dikatakan himpunan pembeda jika untuk setiap verteks pada suatu graf, terdapat satu verteks yang membedakan setiap *edge* pada suatu graf. Dengan kata lain, terdapat satu verteks dalam himpunan pembeda yang jaraknya berbeda terhadap setiap *edge* pada graf tersebut. Penelitian ini menggunakan metode pendekatan analisis struktur graf dan konsep jarak antara *edge* dan verteksnya untuk menentukan dimensi metrik sisi pada suatu graf. Graf helm  $H_n$  dibangun dari graf roda  $W_n$  dengan menambahkan satu verteks anting pada setiap verteks pada  $n$  *cycle*. Graf helm tertutup  $CH_n$  dibangun dari graf helm  $H_n$  di mana pada setiap verteks antingnya membentuk sebuah *cycle*. Penelitian ini dapat memberikan landasan

teoritis untuk menghitung dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup. Diperoleh hasil dimensi metrik sisi pada graf helm  $H_n$  untuk  $n \geq 3$  dan graf helm tertutup  $CH_n$  untuk  $n \geq 3$ .

**Kata kunci** : jarak, himpunan pembeda, dimensi metrik sisi, graf helm, graf helm tertutup



## ABSTRACT

### EDGE METRIC DIMENSION OF HELM GRAPHS AND CLOSE HELM GRAPHS WITH APPLICATIONS OF EDGE METRIC DIMENSIONS

By

Muhammad Fauzi Nur Robiultsani

20106010025

Edge metric dimension is a smallest cardinality of a resolving sets of graph. A sets of vertices is called of resolving sets if for all vertices of graph, there exist a vertex that distinguishes each edges of graph. In other word, there exist a vertex in resolving sets that has a different distance to each edges of graph. This research uses the graphs sturcture analysis approach and the concept of distance between the edges and the vertex to determine the edge metric dimension of graphs. Helm graph  $H_n$  is obtained from a wheel graph  $W_n$  by attaching a pendant vertex in each vertices of  $n$  cycle. Close helm graph  $CH_n$  is obtained from helmet graph  $H_n$  which is each pendant vertices is formed the cycle. This research can gives a theory basis to calculated the edge metric dimension of helmet graph and close helmet graph. The edge metric

dimension of helmet graph  $H_n$  for  $n \geq 3$  and closed helmet graph  $CH_n$  for  $n \geq 3$  are obtained.

**Keyword** : distance, resolving sets, edge metric dimension, helmet graph, close helmet graph





# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam penelitiannya yang berjudul *Seven Bridges of Konigsberg*. Dalam penelitiannya, Euler membuktikan bahwa tidak mungkin untuk setiap jembatan yang terdapat pada kota Konigsberg dilewati tepat satu kali. (Pryor & Sleight, 2011).

Pada abad ke-20, para saintis menemukan banyak manfaat dari teori graf di bidang-bidang lain, seperti ilmu komputer, kimia teoritik, transportasi, dan masih banyak lagi. Disiplin ilmu teori graf akhirnya mendapat perhatian serius setelah seratus tahun berlalu. Ilmu ini menjadi bahan penelitian ilmuwan dan menjadi topik yang diperbincangkan oleh para matematikawan besar pada zaman itu. Pada tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824-1887) berha-

sil mengembangkan teori pohon (*Theory of Tress*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Cayley (1821-1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan tentang permasalahan kimia, yaitu hidrokarbon (Buharah et al., 2022).

Dalam teori graf ini terdapat beberapa cabang materi, salah satunya dimensi metrik. Pada tahun 1975, Slater memperkenalkan konsep himpunan pembeda untuk graf terhubung  $G$ . Dalam sebuah penelitiannya yang berjudul *Leaves of Trees*, ia mengutarakan konsep himpunan pembeda dengan istilah himpunan lokasi. Slater menyebut himpunan pembeda minimum sebagai himpunan referensi untuk graf terhubung  $G$ . Ia menyebut kardinalitas minimum himpunan pembeda (himpunan referensi) sebagai nomor lokasi  $G$ . Slater menjelaskan kegunaan ide-ide ini ketika bekerja dengan stasiun sonar dan loran. Di sisi lain, Harary dan Melter menemukan konsep-konsep ini juga namun menggunakan istilah dimensi metrik, bukan nomor lokasi. Akibatnya, dimensi metrik pada graf terhubung  $G$  yang dinotasikan dengan  $dim(G)$  adalah nilai kardinalitas himpunan pembeda minimum pada graf terhubung

$G$  (Chartrand et al., 2000).

Dimensi metrik sendiri memiliki beberapa variasi, salah satunya dimensi metrik sisi. Dimensi metrik sisi diperkenalkan oleh A. Kelenc pada tahun 2015 dalam penelitiannya yang berjudul *Uniquely Identifying the Edges of a Graph : the Edge Metric Dimension*. (Kelenc et al., 2015) menjelaskan tentang konsep dasar dari dimensi metrik sisi, namun terdapat perbedaan dalam menentukan dimensinya, yaitu menggunakan edge sebagai perbandingannya, sehingga didefinisikan sebagai jarak antara edge dengan himpunan pembedanya. Akibatnya, dimensi metrik sisi pada graf terhubung  $G$  yang dinotasikan dengan  $edim(G)$  adalah nilai kardinalitas himpunan pembeda minimum pada graf terhubung  $G$ . Terdapat beberapa penelitian terkait dimensi metrik sisi, salah satunya dilakukan oleh seorang matematikawan asal pakistan, yaitu Dr. Muhammad Ahsan. Pada tahun 2020, (Ahsan et al., 2020) meneliti tentang *Edge Metric Dimension of Some Classes of Circulant Graphs*. Pada tahun 2021, (Ahsan et al., 2021) meneliti tentang *On the Edge Metric Dimension of Certain Polyphenyl Chains*.

Graf helm merupakan salah satu jenis graf yang menarik, di mana pada graf tersebut memiliki struktur yang sangat teratur, yaitu setiap verteks pada *cyclenya* memiliki derajat yang sama dan verteks pusatnya terhubung dengan seluruh verteks pada verteks *cyclenya*. Graf helm telah menjadi objek penelitian sebelumnya. Pada tahun 2013, (Widodo, 2013) meneliti tentang Dimensi Metrik Pada Graf Sun, Graf Helm Dan Graf Double Cones. Pada tahun 2018, (Rahayu & Kuswardi, 2018) meneliti tentang Dekomposisi Graf Helm. Pada tahun 2022, (Darmaji & Azahra, 2022) meneliti tentang *The Mixed Metric Dimension of Wheel-like Graphs*. Pada tahun 2023, (Lessya et al., 2023) meneliti tentang Bilangan Kromatik Lokasi Graf Helm  $H_m$  dengan  $3 \leq m \leq 9$ .

Graf helm memiliki beberapa variasi, salah satunya graf helm tertutup. Graf helm tertutup memiliki struktur yang unik, yaitu setiap verteks antingnya saling terhubung membentuk sebuah *cycle*. Terdapat beberapa penelitian yang membahas terkait graf helm tertutup. Pada tahun 2013, (Nurhidayat, 2013) meneliti tentang Grup Automorfisme Graf Helm, Graf Helm Tertutup dan Graf Buku. Pada tahun 2014, (Rahmadi & Kusmayadi, 2014) me-

neliti tentang Dimensi Metrik pada Graf Close Helm. Pada tahun 2023, (Hawari et al., 2023) meneliti tentang *Strong Dominating Set* pada Graf Helm Tertutup dan Graf Kincir Angin Belanda.

Meskipun graf helm telah menjadi objek penelitian, namun belum banyak yang membahas dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup pada penelitian sebelumnya. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas tentang dimensi sisi metrik pada graf helm dan graf helm tertutup, dimulai dengan memperkenalkan konsep dimensi metrik sisi, dilanjutkan dengan membahas tentang graf helm dan graf helm tertutup. Selanjutnya, pembahasan dilanjutkan dengan mencari rumus umum dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup sebanyak  $n$  titik.

## 1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada tugas akhir ini sebagai berikut.

1. mencari dimensi metrik sisi pada graf helm dengan  $n$  titik
2. mencari dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup dengan

$$n = 3, 4, 5, 6$$

3. Aspek yang digunakan dalam menentukan penempatan lokasi Dinas Pemadam Kebakaran di Kabupaten Bantul hanya berfokus pada konsep perhitungan dimensi metrik sisi.

### **1.3. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep dasar dimensi metrik sisi pada graf?
2. Bagaimana dimensi metrik sisi pada graf helm?
3. Bagaimana dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup?
4. Bagaimana aplikasi konsep dimensi metrik sisi di kehidupan sehari-hari?

### **1.4. Tujuan Penelitian**

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari tentang konsep dasar dimensi metrik sisi pada

graf.

2. Mencari dimensi metrik sisi pada graf helm.
3. Mencari dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup.
4. Mempelajari aplikasi konsep dimensi metrik sisi pada penempatan lokasi pemadam kebakaran.

### **1.5. Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman tentang konsep dasar dimensi metrik sisi pada graf.
2. Mengetahui dimensi metrik sisi pada graf helm.
3. Mengetahui dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup.
4. Mengetahui aplikasi konsep dimensi metrik sisi pada penempatan lokasi pemadam kebakaran.

## 1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan penelitian ini bersumber dari buku, makalah, dan jurnal. Berikut tinjauan pustaka yang digunakan dalam penulisan penelitian ini.

1. Jurnal karya Gary Chartrand, Linda Eroh, Mark A. Johnson dan Ortrud R. Oellermann (2000) yang berjudul *Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of a Graph* yang membahas mengenai konsep dimensi metrik. Penelitian ini mengenalkan tentang konsep dasar dari dimensi metrik, kemudian dilanjutkan dengan teorema-teorema yang mendukung definisi dari dimensi metrik.
2. Jurnal karya Alexander Kelenc, Niko Traknik dan Ismael G. Yero (2015) yang berjudul *Uniquely Identifying the Edges of a Graph: the Edge Metric Dimension* yang membahas mengenai konsep dimensi metrik sisi. Penelitian ini mengenalkan tentang konsep dasar dari dimensi metrik sisi, kemudian dilanjutkan dengan teorema-teorema yang mendukung



definsi dari dimensi metrik sisi.

3. Jurnal karya Joseph A. Gallian (2016) yang berjudul *A Dynamic Survey of Graph Labeling* yang membahas mengenai graf helm. Penelitian ini menjelaskan asal usul tentang graf helm, yang di mana graf helm tersebut dibangun dari graf roda.
4. Jurnal karya M. A. Seoud and M. Z. Youssef (1893) yang berjudul *Harmonious labellings of helms and related graphs* yang membahas mengenai graf helm dan graf helm tertutup. Penelitian ini menjelaskan asal usul tentang graf helm dan graf helm tertutup.

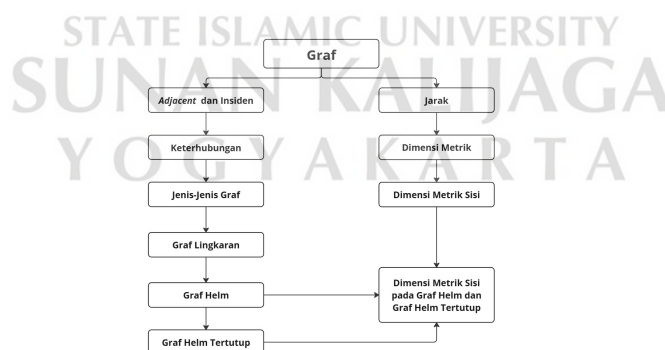
### 1.7. Metode Penelitian

Pada penelitian ini, penulis melakukan penelitian dengan menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal terkait topik penelitian, yaitu konsep dasar dimensi metrik sisi, karakteristik graf helm dan karakteristik graf tertutup.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini di-

mulai dari konsep dasar graf yang meliputi *adjacent* dan *incident*, lalu dilanjut dengan keterhubungan. Selanjutnya dibahas mengenai jenis-jenis graf dimana salah satu jenis yang ada pada graf adalah graf lingkaran. Disisi lain, konsep dasar graf juga meliputi konsep jarak, lalu dilanjut dengan dimensi metrik, dan dimensi metrik sisi.

Langkah selanjutnya akan dibahas mengenai karakteristik dari graf helm, dimana graf tersebut dibangun dari graf lingkaran. Selanjutnya, akan dibahas mengenai graf helm tertutup dimana graf tersebut dibangun dari graf helm. Pembahasan selanjutnya akan dijelaskan tentang dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup. Berikut diberikan skema alur pada penelitian ini.



**Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian**

### 1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas tentang graf, *adjacent* dan *incident*, keterhubungan, jenis-jenis graf, terminologi dasar graf, derajat verteks, dan isomorfis graf, dimensi metrik, dimensi metrik sisi.
- BAB 3** : Bab ini membahas tentang karakteristik graf helm, karakteristik graf helm tertutup dan penentuan dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup.

**BAB 4** : Bab ini berisikan tentang aplikasi dimensi metrik sisi pada penempatan lokasi pemadam kebakaran di Kabupaten Bantul.

**BAB 5** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

## BAB V

### PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

#### 5.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil oleh penulis setelah menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Dimensi metrik sisi adalah nilai kardinalitas himpunan pembe-  
beda minimum pada suatu graf, dimana pada konsep terse-  
but melibatkan jarak antara edge dengan himpunan pembe-  
da.
2. Graf helm  $H_n$  merupakan graf yang dibangun dari graf ro-  
da  $W_n$  dengan menambahkan  $n$  verteks berderajat 1 yang  
*adjacent* dengan setiap verteks pada  $n$  cycle. Dari karak-

teristik tersebut, diperoleh bahwa dimensi metrik sisi pada graf helm dengan  $n$  titik untuk  $n \geq 3$  sebagai berikut.

$$edim(H_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3 \\ 4, & \text{jika } n = 4 \\ n - 1, & \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$$

3. Graf helm tertutup  $CH_n$  merupakan graf yang dibangun dari graf helm  $H_n$  di mana pada setiap verteks anting terdapat lintasan yang membentuk *cycle*. Dari karakteristik tersebut, diperoleh bahwa dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup dengan  $n$  titik untuk  $n \geq 3$  sebagai berikut.

$$edim(H_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3 \\ 4, & \text{jika } n = 4 \\ n - 1, & \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$$

4. Konsep dimensi metrik sisi dapat diaplikasikan pada penempatan lokasi Dinas Pemadam Kebakaran di Kabupaten Bantul, dimulai dengan menentukan himpunan pembeda  $W_E$

(dalam hal ini lokasi kapanewon yang strategis untuk dibangun Dinas Pemadam Kebakaran), dilanjutkan dengan menghitung jarak antara *edge* (dalam hal ini wilayah kapanewon yang saling terhubung secara langsung) dengan himpunan pembeda  $W_E$  sehingga diperoleh bahwa untuk lokasi yang akan dibangun Dinas Pemadam Kebakaran.

## 5.2. Saran

Saran yang akan penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. Pada penelitian ini hanya membahas mengenai dimensi metrik sisi pada graf helm. Namun, pada pembahasan dimensi metrik sisi pada graf helm hanya dibatasi  $n = 6$ . Oleh karena itu, penulis mengharapkan adanya pembahasan lebih lanjut mengenai dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup.
2. Penulis berharap adanya pembahasan lebih lanjut mengenai aplikasi dari konsep dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup di kehidupan sehari-hari.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ahsan, M., Zahid, Z., Alrowaili, D., Iampan, A., Siddique, I., & Zafar, S. (2021). [retracted] on the edge metric dimension of certain polyphenyl chains. *Journal of Chemistry*, 2021(1):3855172.
- Ahsan, M., Zahid, Z., & Zafar, S. (2020). Edge metric dimension of some classes of circulant graphs. *Analele științifice ale Universității "Ovidius" Constanța. Seria Matematică*, 28(3):15–37.
- Buhaerah, B., Busrah, Z., & Sanjaya, H. (2022). Teori graf dan aplikasinya.
- Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105:99–113.
- Daniel, F. & Taneo, P. N. (2019). *Teori Graf*. Deepublish.



- Darmaji & Azahra, N. (2022). The mixed metric dimension of wheel-like graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 2157, <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:246012727>.
- Gallian, J. A. (2016). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(23).
- Hawari, I. U., Dafik, D., & Adawiyah, R. (2023). Strong dominating set pada graf helm tertutup dan graf kincir angin belanda. *CGANT JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS*, 4(1):36–39.
- Kelenc, A., Tratnik, N., & Yero, I. G. (2015). Uniquely identifying the edges of a graph: the edge metric dimension. *Discrete Applied Mathematics*, 251:204–220.
- Lessya, K. N., Welyyanti, D., & Yulianti, L. (2023). Bilangan kromatik lokasi graf helm hm dengan 3 m 9. *Jurnal Matematika UNAND*, 12(3):222–228.
- Munandar, A. (2022). *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*. Sleman : Deepublish (CV Budi Utama).

- Nurhidayat, A. (2013). Grup automorfisme graf helm, graf helm tertutup, dan graf buku. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 1(5).
- Pryor, K. O. & Sleight, J. (2011). The seven bridges of königsberg. *The Journal of the American Society of Anesthesiologists*, 114(4):739–740.
- Rahayu, R. D. & Kuswardi, Y. (2018). Dekomposisi graf helm. *Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 8(1):31–45.
- Rahmadi, D. & Kusmayadi, T. A. (2014). Dimensi metrik pada graf closed helm. *Prosiding*.
- Seoud, M. & Youssef, M. (1893). Harmonious labellings of helms and related graphs. *preprint*.
- Septiana Eka, R. & Rahadjeng, B. (2012). Dimensi metrik pada graf lintasan, graf komplit, graf sikel, graf bintang dan graf bipartit komplit. *Teorema*, 3:3.
- Widodo, B. J. (2013). Dimensi metrik pada graf sun, graf helm da-

ngraf double cones. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118559474>.

Zubrilina, N. (2018). On the edge dimension of a graph. *Discrete Mathematics*, 341(7):2083–2088.

