

SKRIPSI

**DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF HELM
DAN GRAF HELM TERTUTUP BESERTA
APLIKASI DIMENSI METRIK SISI**



MUHAMMAD FAUZI NUR ROBIUL TSANI

20106010025

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2025

**DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF HELM
DAN GRAF HELM TERTUTUP BESERTA
APLIKASI DIMENSI METRIK SISI**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



diajukan oleh

MUHAMMAD FAUZI NUR ROBIUL TSANI

SUNAN KALIJAGA
20106010025

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2025



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Muhammad Fauzi Nur Robiultsani

NIM : 20106010025

Judul Skripsi : *Dimensi Metrik Sisi pada Graf Helm dan Graf Helm Tertutup beserta Aplikasinya*

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 23 Januari 2025

Pembimbing I

Pembimbing II

Muhammad Abrori, S.Si., M.Kom

NIP. 19720423 199903 1 003

Deddy Rahmadi, M.Sc.

NIP. 19930807 202203 1 001



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-208/Un.02/DST/PP.00.9/01/2025

Tugas Akhir dengan judul : Dimensi Metrik Sisi pada Graf Helm dan Graf Helm Tertutup beserta Aplikasi Dimensi Metrik Sisi

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : MUHAMMAD FAUZI NUR ROBIUL TSANI
Nomor Induk Mahasiswa : 20106010025
Telah diujikan pada : Jumat, 24 Januari 2025
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom
SIGNED

Valid ID: 67970eb8cd2e2a



Penguji I

Deddy Rahmadi, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 679a83a53590e



Penguji II

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 679aed5bcf9ba



Yogyakarta, 24 Januari 2025

UIN Sunan Kalijaga

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 679b31b87eb42

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Muhammad Fauzi Nur Robiultsani

NIM : 20106010024

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 23 Januari 2025



Muhammad Fauzi Nur Robiultsani

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



HALAMAN MOTTO



Datang sebagai lelaki, pulang sebagai lelaki

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Dimensi Metrik Sisi pada Graf Helm dan Graf Helm Tertutup". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan ke rendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Ephra Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Pro-

gram Studi Matematika

3. Aulia Khifah Futhona, M.Sc., selaku Dosen Penasehat Akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
4. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom. dan Deddy Rahmadi, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelajaran administrasi akademik.
6. Orang tua yang selalu memberikan doa dan restunya serta selalu memberikan dukungan penuh dan memotivasi kepada penulis dalam penyusunan skripsi.
7. Sindi Lestari, perempuan yang selalu memberikan doa, dukungan serta memotivasi penulis dan membantu penulis dalam penyusunan skripsi.

8. Sahabat penulis dalam grup Maul Prenjon yang selalu memberikan doa dan dukungannya kepada penulis.
9. Mas Raka dan Mas Imam yang selalu memberi motivasi dan membantu penulis dalam penggerjaan skripsi.
10. Sahabat penulis dalam grup Saintek Musik yang selalu memberikan doa dan dukungannya kepada penulis.
11. Komunitas Pecinta Aljabar dan Kelompok KKN Magetan yang telah memberikan doa dan dukungan kepada penulis.
12. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi yang membacanya dan juga dapat menjadi salah satu referensi bagi penelitian selanjutnya. Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih memiliki banyak kekurangan, oleh karena itu, penulis mengharapkan adanya kritik dan saran yang membangun dalam penulisan skripsi ini.

x

Yogyakarta, 22 Januari 2025

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xvi
DAFTAR LAMBANG	xviii
INTISARI	xx
ABSTRACT	xxii
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	5
1.3. Rumusan Masalah	6

1.4. Tujuan Penelitian	6
1.5. Manfaat Penelitian	7
1.6. Tinjauan Pustaka	8
1.7. Metode Penelitian	9
1.8. Sistematika Penulisan	11
II DASAR TEORI	13
2.1. Graf	13
2.2. <i>Adjacent</i> dan <i>Incident</i>	16
2.3. Keterhubungan	18
2.4. Jenis-jenis graf	20
2.5. Terminologi dasar graf	24
2.6. Derajat Verteks	27
2.7. Isomorfis Graf	28
2.8. Dimensi Metrik	29
2.9. Dimensi Metrik Sisi	36
III DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF HELM DAN GRAF HELM TERTUTUP	45
3.1. Karakteristik Graf Helm	45
3.2. Karakteristik Graf Helm Tertutup	48

3.3. Penentuan Dimensi Metrik Sisi pada Graf Helm dan Graf helm tertutup	51
IV APLIKASI PADA PENEMPATAN LOKASI DINAS PEMADAM KEBAKARAN	79
4.1. Gambaran Umum Wilayah Kabupaten Bantul	79
4.2. Penentuan Dimensi Metrik Sisi Pada Penempatan Lokasi Pemadam Kebakaran	83
V PENUTUP	88
5.1. Kesimpulan	88
5.2. Saran	90
DAFTAR PUSTAKA	90
LAMPIRAN	95
A TABEL REPRESENTASI JARAK EDGE TERHADAP SELURUH VERTEKS	95
Curriculum Vitae	97

DAFTAR TABEL

2.1	Derajat verteks pada graf G_4	28
3.1	Tabel representasi jarak setiap edge dengan W_E pada graf H_3	52
3.2	Tabel representasi jarak setiap edge dengan W_E pada graf H_4	56
3.3	Tabel representasi setiap edge terhadap W_E pada graf H_n	61
3.4	Tabel representasi jarak setiap edge dengan selu- ruh verteks di graf CH_3	64
3.5	Tabel representasi jarak setiap edge dengan selu- ruh verteks di graf CH_4	67
3.6	Tabel representasi jarak setiap edge dengan selu- ruh verteks di graf CH_5	73
3.7	Tabel representasi jarak setiap edge dengan selu- ruh verteks di graf CH_6	75
4.1	Tabel Kapanewon di Kabupaten bantul	81

4.2 Tabel representasi jarak <i>edge</i> terhadap himpunan pembeda W_E	85
---	----



DAFTAR GAMBAR

1.1	Skema Metode Penelitian	10
2.1	Graf G_1 dengan <i>edge</i> dan graf G_2 tanpa <i>edge</i>	14
2.2	Graf G_3 dengan <i>loop</i> dan <i>parallel</i>	15
2.3	Graf H_1	16
2.4	Graf Terhubung G_4	17
2.5	Graf G_3 dengan <i>edge</i>	19
2.6	Graf Terhubung G_5	21
2.7	Graf Komplit	22
2.8	Graf Lingkaran	23
2.9	Graf P_4	23
2.10	Graf P_4	24
2.11	Graf P_4 dengan Eksentrisitas	25
2.12	Graf G Kiri dan Graf H Kanan	29
2.13	Graf Terhubung G_5	35
2.14	Graf Terhubung G_5	43
3.1	Graf Roda W_n	46

3.2	Graf Helm H_n	47
3.3	Graf Helm Tertutup CH_n	49
3.4	Graf Helm H_3	52
3.5	Graf Helm H_4	55
3.6	Graf Helm CH_3	63
3.7	Graf Helm Tertutup CH_4	67
4.1	Peta wilayah Kabupaten Bantul	80
4.2	Graf representasi wilayah kapanewon di Kabupaten Bantul	82



DAFTAR LAMBANG

V	: himpunan verteks
E	: himpunan <i>edge</i>
$v \in V$: v anggota V
$n \leq a$: n kurang dari sama dengan a
K_n	: graf komplit dengan n titik
C_n	: graf lingkaran dengan n titik
P_n	: graf lintasan dengan n titik
$V(H) \subseteq V(G)$: $V(H)$ himpunan bagian (<i>subset</i>) atau sama dengan $V(G)$
$d(u, v)$: jarak antara verteks u dan v
$e(v)$: eksentrisitas dari verteks v
$rad(G)$: jari-jari dari graf G
$diam(G)$: diameter dari graf G
$N(v)$: persekitaran dari verteks v
$der(v)$: derajat dari verteks v

- $G \cong H$: graf G isomorfis dengan graf H
- W : himpunan pembeda pada dimensi metrik
- $r(v|W)$: nilai dari verteks v terhadap himpunan
pembeda
- $\dim(G)$: dimensi metrik pada graf G
- W_E : himpunan pembeda pada dimensi metrik
sisi
- $r(e|W_E)$: nilai dari edge e terhadap himpunan pem-
beda
- $edim(G)$: dimensi metrik sisi pada graf G
- \rightarrow : menuju



INTISARI

DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF HELM DAN GRAF HELM TERTUTUP BESERTA APLIKASI DIMENSI

METRIK SISI

Oleh

Muhammad Fauzi Nur Robiultsani

20106010025

Dimensi metrik sisi merupakan kardinalitas himpunan pembeda minimum pada suatu graf. Kumpulan verteks dikatakan himpunan pembeda jika untuk setiap verteks pada suatu graf, terdapat satu verteks yang membedakan setiap *edge* pada suatu graf. Dengan kata lain, terdapat satu verteks dalam himpunan pembeda yang jaraknya berbeda terhadap setiap *edge* pada graf tersebut. Penelitian ini menggunakan metode pendekatan analisis struktur graf dan konsep jarak antara *edge* dan verteksnya untuk menentukan dimensi metrik sisi pada suatu graf. Graf helm H_n dibangun dari graf roda W_n dengan menambahkan satu verteks anting pada setiap verteks pada n *cycle*. Graf helm tertutup CH_n dibangun dari graf helm H_n di mana pada setiap verteks antingnya membentuk sebuah *cycle*. Penelitian ini dapat memberikan landasan

teoritis untuk menghitung dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup. Diperoleh hasil dimensi metrik sisi pada graf helm H_n untuk $n \geq 3$ dan graf helm tertutup CH_n untuk $n \geq 3$.

Kata kunci : jarak, himpunan pembeda, dimensi metrik sisi, graf helm, graf helm tertutup



ABSTRACT

EDGE METRIC DIMENSION OF HELM GRAPHS AND CLOSE HELM GRAPHS WITH APPLICATIONS OF EDGE METRIC DIMENSIONS

By

Muhammad Fauzi Nur Robiultsani

20106010025

Edge metric dimension is a smallest cardinality of a resolving sets of graph. A sets of vertices is called of resolving sets if for all vertices of graph, there exist a vertex that distinguishes each edges of graph. In other word, there exist a vertex in resolving sets that has a different distance to each edges of graph. This research uses the graphs sturture analysis approach and the concept of distance between the edges and the vertex to determine the edge metric dimension of graphs. Helm graph H_n is obtained from a wheel graph W_n by attaching a pendant vertex in each vertices of n cycle. Close helm graph CH_n is obtained from helmet graph H_n which is each pendant vertices is formed the cycle. This research can gives a theory basis to calculated the edge metric dimension of helmet graph and close helmet graph. The edge metric

dimension of helmet graph H_n for $n \geq 3$ and closed helmet graph CH_n for $n \geq 3$ are obtained.

Keyword : distance, resolving sets, edge metric dimension, helmet graph, close helmet graph



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam penelitiannya yang berjudul *Seven Bridges of Konigsberg*. Dalam penelitiannya, Euler membuktikan bahwa tidak mungkin untuk setiap jembatan yang terdapat pada kota Konigsberg dilewati tepat satu kali. (Pryor & Sleigh, 2011).

Pada abad ke-20, para saintis menemukan banyak manfaat dari teori graf di bidang-bidang lain, seperti ilmu komputer, kimia teoritik, trasportasi, dan masih banyak lagi. Disiplin ilmu teori graf akhirnya mendapat perhatian serius setelah seratus tahun berlalu. Ilmu ini menjadi bahan penelitian ilmuwan dan menjadi topik yang diperbincangkan oleh para matematikawan besar pada zaman itu. Pada tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824-1887) berha-

sil mengembangkan teori pohon (*Theory of Tress*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Cayley (1821-1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan tentang permasalahan kimia, yaitu hidrokarbon (Buhaerah et al., 2022).

Dalam teori graf ini terdapat beberapa cabang materi, salah satunya dimensi metrik. Pada tahun 1975, Slater memperkenalkan konsep himpunan pembeda untuk graf terhubung G . Dalam sebuah penelitiannya yang berjudul *Leaves of Trees*, ia mengutarakan konsep himpunan pembeda dengan istilah himpunan lokasi. Slater menyebut himpunan pembeda minimum sebagai himpunan referensi untuk graf terhubung G . Ia menyebut kardinalitas minimum himpunan pembeda (himpunan referensi) sebagai nomor lokasi G . Slater menjelaskan kegunaan ide-ide ini ketika bekerja dengan stasiun sonar dan loran. Di sisi lain, Harary dan Melter menemukan konsep-konsep ini juga namun menggunakan istilah dimensi metrik, bukan nomor lokasi. Akibatnya, dimensi metrik pada graf terhubung G yang dinotasikan dengan $\dim(G)$ adalah nilai kardinalitas himpunan pembeda minimum pada graf terhubung

G (Chartrand et al., 2000).

Dimensi metrik sendiri memiliki beberapa variasi, salah satunya dimensi metrik sisi. Dimensi metrik sisi diperkenalkan oleh A. Kelenc pada tahun 2015 dalam penelitiannya yang berjudul *Uniquely Identifying the Edges of a Graph : the Edge Metric Dimension*. (Kelenc et al., 2015) menjelaskan tentang konsep dasar dari dimensi metrik sisi, namun terdapat perbedaan dalam menentukan dimensinya, yaitu menggunakan edge sebagai perbandingannya, sehingga didefinisikan sebagai jarak antara edge dengan himpunan pembedanya. Akibatnya, dimensi metrik sisi pada graf terhubung G yang dinotasikan dengan $edim(G)$ adalah nilai kardinalitas himpunan pembeda minimum pada graf terhubung G . Terdapat beberapa penelitian terkait dimensi metrik sisi, salah satunya dilakukan oleh seorang matematikawan asal pakistan, yaitu Dr. Muhammad Ahsan. Pada tahun 2020, (Ahsan et al., 2020) meneliti tentang *Edge Metric Dimension of Some Classes of Circulant Graphs*. Pada tahun 2021, (Ahsan et al., 2021) meneliti tentang *On the Edge Metric Dimension of Certain Polyphenyl Chains*.

Graf helm merupakan salah satu jenis graf yang menarik, di mana pada graf tersebut memiliki struktur yang sangat teratur, yaitu setiap verteks pada *cyclenya* memiliki derajat yang sama dan verteks pusatnya terhubung dengan seluruh verteks pada verteks *cyclenya*. Graf helm telah menjadi objek penelitian sebelumnya. Pada tahun 2013, (Widodo, 2013) meneliti tentang Dimensi Metrik Pada Graf Sun, Graf Helm Dan Graf Double Cones. Pada tahun 2018, (Rahayu & Kuswardi, 2018) meneliti tentang Dekomposisi Graf Helm. Pada tahun 2022, (Darmaji & Azahra, 2022) meneliti tentang *The Mixed Metric Dimension of Wheel-like Graphs*. Pada tahun 2023, (Lessya et al., 2023) meneliti tentang Bilangan Kromatik Lokasi Graf Helm H_m dengan $3 \leq m \leq 9$.

Graf helm memiliki beberapa variasi, salah satunya graf helm tertutup. Graf helm tertutup memiliki struktur yang unik, yaitu setiap verteks antingnya saling terhubung membentuk sebuah *cycle*. Terdapat beberapa penelitian yang membahas terkait graf helm tertutup. Pada tahun 2013, (Nurhidayat, 2013) meneliti tentang Grup Automorfisme Graf Helm, Graf Helm Tertutup dan Graf Buku. Pada tahun 2014, (Rahmadi & Kusmayadi, 2014) me-

neliti tentang Dimensi Metrik pada Graf Close Helm. Pada tahun 2023, (Hawari et al., 2023) meneliti tentang *Strong Dominating Set* pada Graf Helm Tertutup dan Graf Kincir Angin Belanda.

Meskipun graf helm telah menjadi objek penelitian, namun belum banyak yang membahas dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup pada penelitian sebelumnya. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas tentang dimensi sisi metrik pada graf helm dan graf helm tertutup, dimulai dengan memperkenalkan konsep dimensi metrik sisi, dilanjut dengan membahas tentang graf helm dan graf helm tertutup. Selanjutnya, pembahasan dilanjut dengan mencari rumus umum dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup sebanyak n titik.

1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada tugas akhir ini sebagai berikut.

1. mencari dimensi metrik sisi pada graf helm dengan n titik
2. mencari dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup dengan

$$n = 3, 4, 5, 6$$

3. Aspek yang digunakan dalam menentukan penempatan lokasi Dinas Pemadam Kebakaran di Kabupaten Bantul hanya berfokus pada konsep perhitungan dimensi metrik sisi.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep dasar dimensi metrik sisi pada graf?
2. Bagaimana dimensi metrik sisi pada graf helm?
3. Bagaimana dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup?
4. Bagaimana aplikasi konsep dimensi metrik sisi di kehidupan sehari-hari?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari tentang konsep dasar dimensi metrik sisi pada

graf.

2. Mencari dimensi metrik sisi pada graf helm.
3. Mencari dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup.
4. Mempelajari aplikasi konsep dimensi metrik sisi pada pem-
nempatan lokasi pemadam kebakaran.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman tentang konsep dasar dimensi me-
trik sisi pada graf.
2. Mengetahui dimensi metrik sisi pada graf helm.
3. Mengetahui dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup.
4. Mengetahui aplikasi konsep dimensi metrik sisi pada pe-
nempatan lokasi pemadam kebakaran.

1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan penelitian ini bersumber dari buku, makalah, dan jurnal. Berikut tinjauan pustaka yang digunakan dalam penulisan penelitian ini.

1. Jurnal karya Gary Chartrand, Linda Eroh, Mark A. Johnson dan Ortrud R. Oellermann (2000) yang berjudul ***Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of a Graph*** yang membahas mengenai konsep dimensi metrik. Penelitian ini mengenalkan tentang konsep dasar dari dimensi metrik, kemudian dilanjut dengan teorema-teorema yang mendukung definisi dari dimensi metrik.
2. Jurnal karya Alexander Kelenc, Niko Trakniki dan Ismael G. Yero (2015) yang berjudul ***Uniquely Identifying the Edges of a Graph: the Edge Metric Dimension*** yang membahas mengenai konsep dimensi metrik sisi. Penelitian ini mengenalkan tentang konsep dasar dari dimensi metrik sisi, kemudian dilanjut dengan teorema-teorema yang mendukung

definsi dari dimensi metrik sisi.

3. Jurnal karya Joseph A. Gallian (2016) yang berjudul *A Dynamic Survey of Graph Labeling* yang membahas mengenai graf helm. Penelitian ini menjelaskan asal usul tentang graf helm, yang di mana graf helm tersebut dibangun dari graf roda.
4. Jurnal karya M. A. Seoud and M. Z. Youssef (1893) yang berjudul *Harmonious labellings of helms and related graphs* yang membahas mengenai graf helm dan graf helm tertutup. Penelitian ini menjelaskan asal usul tentang graf helm dan graf helm tertutup.

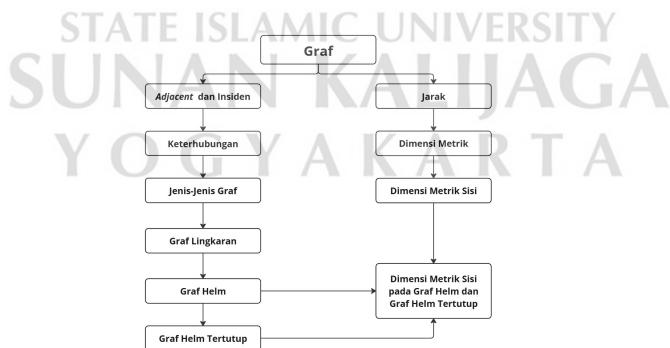
1.7. Metode Penelitian

Pada penelitian ini, penulis melakukan penelitian dengan menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal terkait topik penelitian, yaitu konsep dasar dimensi metrik sisi, karakteristik graf helm dan karakteristik graf tertutup.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini di-

mulai dari konsep dasar graf yang meliputi *adjacent* dan *incident*, lalu dilanjut dengan keterhubungan. Selanjutnya dibahas mengenai jenis-jenis graf dimana salah satu jenis yang ada pada graf adalah graf lingkaran. Disisi lain, konsep dasar graf juga meliputi konsep jarak, lalu dilanjut dengan dimensi metrik, dan dimensi metrik sisi.

Langkah selanjutnya akan dibahas mengenai karakteristik dari graf helm, dimana graf tersebut dibangun dari graf lingkaran. Selanjutnya, akan dibahas mengenai graf helm tertutup dimana graf tersebut dibangun dari graf helm. Pembahasan selanjutnya akan dijelaskan tentang dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup. Berikut diberikan skema alur pada penelitian ini.



Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

BAB 1 : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB 2 : Bab ini membahas tentang graf, *adjacent* dan *incident*, keterhubungan, jenis-jenis graf, terminologi dasar graf, derajat verteks, dan isomorfis graf, dimensi metrik, dimensi metrik sisi.

BAB 3 : Bab ini membahas tentang karakteristik graf helm, karakteristik graf helm tertutup dan penentuan dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup.

BAB 4 : Bab ini berisikan tentang aplikasi dimensi metrik sisi pada penempatan lokasi pemadam kebakaran di Kabupaten Bantul.

BAB 5 : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.



BAB V

PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

5.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil oleh penulis setelah menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Dimensi metrik sisi adalah nilai kardinalitas himpunan pembeda minimum pada suatu graf, dimana pada konsep tersebut melibatkan jarak antara edge dengan himpunan pembeda.
2. Graf helm H_n merupakan graf yang dibangun dari graf roda W_n dengan menambahkan n verteks berderajat 1 yang *adjacent* dengan setiap verteks pada n cycle. Dari karakteristik

teristik tersebut, diperoleh bahwa dimensi metrik sisi pada graf helm dengan n titik untuk $n \geq 3$ sebagai berikut.

$$edim(H_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3 \\ 4, & \text{jika } n = 4 \\ n - 1, & \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$$

3. Graf helm tertutup CH_n merupakan graf yang dibangun dari graf helm H_n di mana pada setiap verteks anting terdapat lintasan yang membentuk *cycle*. Dari karakteristik tersebut, diperoleh bahwa dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup dengan n titik untuk $n \geq 3$ sebagai berikut.

$$edim(H_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3 \\ 4, & \text{jika } n = 4 \\ n - 1, & \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$$

4. Konsep dimensi metrik sisi dapat diaplikasikan pada penempatan lokasi Dinas Pemadam Kebakaran di Kabupaten Bantul, dimulai dengan menentukan himpunan pembeda W_E

(dalam hal ini lokasi kapanewon yang strategis untuk dibangun Dinas Pemadam Kebakaran), dilanjutkan dengan menghitung jarak antara *edge* (dalam hal ini wilayah kapanewon yang saling terhubung secara langsung) dengan himpunan pembeda W_E sehingga diperoleh bahwa untuk lokasi yang akan dibangun Dinas Pemadam Kebakaran.

5.2. Saran

Saran yang akan penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. Pada penelitian ini hanya membahas mengenai dimensi metrik sisi pada graf helm. Namun, pada pembahasan dimensi metrik sisi pada graf helm hanya dibatasi $n = 6$. Oleh karena itu, penulis mengharapkan adanya pembahasan lebih lanjut mengenai dimensi metrik sisi pada graf helm tertutup.
2. Penulis berharap adanya pembahasan lebih lanjut mengenai aplikasi dari konsep dimensi metrik sisi pada graf helm dan graf helm tertutup di kehidupan sehari-hari.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahsan, M., Zahid, Z., Alrowaili, D., Iampan, A., Siddique, I., & Zafar, S. (2021). [retracted] on the edge metric dimension of certain polyphenyl chains. *Journal of Chemistry*, 2021(1):3855172.
- Ahsan, M., Zahid, Z., & Zafar, S. (2020). Edge metric dimension of some classes of circulant graphs. *Analele științifice ale Universității "Ovidius" Constanța. Seria Matematică*, 28(3):15–37.
- Buhaerah, B., Busrah, Z., & Sanjaya, H. (2022). Teori graf dan aplikasinya.
- Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105:99–113.
- Daniel, F. & Taneo, P. N. (2019). *Teori Graf*. Deepublish.

Darmaji & Azahra, N. (2022). The mixed metric dimension of wheel-like graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 2157, <https://api.semanticscholar.org/> CorpusID:246012727.

Gallian, J. A. (2016). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(23).

Hawari, I. U., Dafik, D., & Adawiyah, R. (2023). Strong dominating set pada graf helm tertutup dan graf kincir angin belanda. *CGANT JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS*, 4(1):36–39.

Kelenc, A., Tratnik, N., & Yero, I. G. (2015). Uniquely identifying the edges of a graph: the edge metric dimension. *Discrete Applied Mathematics*, 251:204–220.

Lessya, K. N., Welyyanti, D., & Yulianti, L. (2023). Bilangan kromatik lokasi graf helm hm dengan $3 \leq m \leq 9$. *Jurnal Matematika UNAND*, 12(3):222–228.

Munandar, A. (2022). *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*. Sleman : Deepublish (CV Budi Utama).

- Nurhidayat, A. (2013). Grup automorfisme graf helm, graf helm tertutup, dan graf buku. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 1(5).
- Pryor, K. O. & Sleigh, J. (2011). The seven bridges of königsberg. *The Journal of the American Society of Anesthesiologists*, 114(4):739–740.
- Rahayu, R. D. & Kuswardi, Y. (2018). Dekomposisi graf helm. *Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 8(1):31–45.
- Rahmadi, D. & Kusmayadi, T. A. (2014). Dimensi metrik pada graf closed helm. *Prosiding*.
- Seoud, M. & Youssef, M. (1893). Harmonious labellings of helms and related graphs. *preprint*.
- Septiana Eka, R. & Rahadjeng, B. (2012). Dimensi metrik pada graf lintasan, graf komplit, graf sikel, graf bintang dan graf bipartit komplit. *Teorema*, 3:3.
- Widodo, B. J. (2013). Dimensi metrik pada graf sun, graf helm da-

ngraf double cones. <https://api.semanticscholar.org/>CorpusID:118559474.

Zubrilina, N. (2018). On the edge dimension of a graph. *Discrete Mathematics*, 341(7):2083–2088.

