

SKRIPSI

**STRUKTUR GRAF CAYLEY PADA GRUP DIHEDRAL DAN
GRUP QUATERNION TERGENERALISASI VALENSI 1, 2, 3,
4, DAN 5**



NABILA RIZQIKA NURHIDAYAT

21106010034

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2025

**STRUKTUR GRAF CAYLEY PADA GRUP DIHEDRAL DAN
GRUP QUATERNION TERGENERALISASI VALENSI 1, 2, 3,
4, DAN 5**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



diajukan oleh

NABILA RIZQIKA NURHIDAYAT

21106010034

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2025



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Nabila Rizqika Nurhidayat

NIM : 21106010034

Judul Skripsi : Struktur Graf Cayley Pada Grup Dihedral dan Grup Quaternion
Tergeneralisasi Valensi 1, 2, 3, 4, dan 5.

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 13 Maret 2025

Pembimbing

Arif Munandar, M.Sc.

NIP. 19920721 201903 1 013



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-461/Un.02/DST/PP.00.9/03/2025

Tugas Akhir dengan judul : Struktur Graf Cayley Pada Grup Dihedral dan Grup Quaternion Tergeneralisasi Valensi 1, 2, 3, 4, dan 5

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : NABILA RIZQIKA NURHIDAYAT
Nomor Induk Mahasiswa : 21106010034
Telah diujikan pada : Kamis, 06 Maret 2025
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang
Arif Munandar, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 67d26201a4bc7



Penguji I
Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 67d1f40f2c4a6



Penguji II
Noor Saif Muhammad Mussafi, S.Si., M.Sc.,
Ph.D.
SIGNED

Valid ID: 67d28e5ce562a



Yogyakarta, 06 Maret 2025
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 67d2913662e07

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Nabila Rizqika Nurhidayat
NIM : 21106010034
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA
Yogyakarta, 13 Maret 2025



83E3BAMX176260607

Nabila Rizqika Nurhidayat

HALAMAN PERSEMBAHAN



Penulis mempersembahkan karya sederhana ini kepada
Almamater UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta dan keluarga
tercinta

HALAMAN MOTTO



*”Kerjakanlah urusan duniamu seakan-akan kamu hidup selamanya,
dan kerjakanlah urusan akhiratmu seakan-akan kamu akan mati besok”*

(HR.At – Tirmidzi)

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Struktur Graf Cayley Pada Grup Dihedral dan Grup Quaternion Tergeneralisasi Valensi 1, 2, 3, 4, dan 5". Penulisan skripsi ini diselesaikan dalam rangka memenuhi salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika sekaligus dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
3. Arif Munandar, M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
4. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.

5. Orang Tua tercinta, Bapak Ferry Hidayat dan Ibu Sitti Murdianah yang menjadi kekuatan terbesar penulis. Terimakasih selalu mendoakan, memotivasi, dan memberikan dukungan untuk keberhasilan anaknya, serta kakak tercinta Raufikrar Nusabhakti Nurhidayat.
6. Diah Ajeng N.A., Refina Nur Asmia, Vizona Fatmawati, Martiana Kusuma N., dan Rismawati yang selalu mendukung dan memotivasi selama pengerjaan skripsi ini.
7. Teman-teman seperbimbingan Alber, Izah, dan Rendi yang selalu mendukung dan memotivasi selama pengerjaan skripsi ini.
8. Teman-teman KKN 124 Cipa, Jasmine, Sasa, Nabilla, Anna, Zudha, Yuris, Jalal, dan Maajid yang selalu mendukung dan memotivasi selama pengerjaan skripsi ini.
9. Keluarga besar penulis, khususnya Ninik Kun Heriyanti tercinta yang selalu mendoakan dan memberi semangat.
10. Teman-teman kosentrasi Aljabar angkatan 2021 yang telah banyak membantu dan memotivasi penulis selama masa perkuliahan dan dan penyusunan skripsi ini.
11. Keluarga besar mahasiswa Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga, khususnya Matematika angkatan 2021 yang telah berproses mengembangkan diri bersama selama masa kuliah.
12. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 11 Maret 2025

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMBANG	xv
INTISARI	xvi
ABSTRACT	xvii
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	3
1.3. Rumusan Masalah	3
1.4. Tujuan Penelitian	3
1.5. Manfaat Penelitian	4
1.6. Tinjauan Pustaka	4
1.7. Metode Penelitian	7
1.8. Sistematika Penulisan	8
II DASAR TEORI	9

2.1. Teori Bilangan	9
2.1.1. Keterbagian	9
2.1.2. Faktor Persekutuan Terbesar	10
2.2. Grup	10
2.2.1. Grup Komutatif dan Grup Non Komutatif	14
2.2.2. Koset dan Teorema Lagrange	16
2.3. Graf	21
2.3.1. Adjacent dan Insiden	23
2.3.2. Keterhubungan	25
2.3.3. Jenis-Jenis Graf	28
2.3.4. Isomorfisme Graf	32
2.3.5. Produk Kartesius Graf	33
2.3.6. Digraf Cayley	34
III Pembahasan	38
3.1. Grup Dihedral dan Grup Quaternion Tergeneralisasi	38
3.1.1. Grup Dihedral	38
3.1.2. Grup Quaternion Tergeneralisasi	42
3.2. Struktur Graf Cayley Pada Grup Dihedral dan Grup Quaternion Ter-	
generalisasi	45
3.2.1. Graf Cayley Pada Grup Dihedral	47
3.2.2. Graf Cayley atas Grup Quaternion Tergeneralisasi	56
IV PENUTUP	65
4.1. Kesimpulan	65
4.2. Saran	67
DAFTAR PUSTAKA	67

DAFTAR TABEL

1.1 Tabel Persamaan dan Perbedaan	5
1.2 Tabel Persamaan dan Perbedaan	6
3.1 Tabel Cayley D_8	39
3.2 Tabel Cayley Q_8	42

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR GAMBAR

1.1 Skema Metode Penelitian	7
2.1 Graf G secara umum	22
2.2 Subgraf dan Bukan Subgraf dari Graf G	23
2.3 Graf G untuk menunjukkan <i>Adjacent</i> dan <i>Insiden</i>	24
2.4 Graf G untuk Menunjukkan Derajat Vertek	25
2.5 Graf G untuk Menunjukkan Walk	26
2.6 Graf Terhubung dan Tidak Terhubung	27
2.7 Komponen Penyusun Graf S	28
2.8 Graf Reguler	28
2.9 Graf Koosong	29
2.10 Graf Komplit	29
2.11 Graf Komplit $2K_4$	29
2.12 Graf <i>cycle</i>	30
2.13 Graf <i>Cycle</i> $2C_6$	30
2.14 Graf tangga G	31
2.15 Graf tangga segitiga G	32
2.16 Graf tangga diagonal G	32
2.17 Isomorfisme Graf	33
2.18 Graf G dan S	34
2.19 $G \square S$	34
2.20 Graf $\text{Cay}(\mathbb{Z}_5, S)$	35
2.21 Graf $\text{Cay}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3, S)$	36

3.1	Graf $Cay(\mathbb{Z}_5, S)$	46
3.2	Graf $Cay(D_{10}, S)$	47
3.3	Graf $Cay(D_{12}, S)$	49
3.4	Graf $Cay(D_{12}, S)$	50
3.5	Graf $Cay(D_8, S)$	52
3.6	Graf $Cay(D_8, S)$	52
3.7	Graf $Cay(D_8, S)$	54
3.8	Graf $Cay(D_8, S)$	54
3.9	Graf $Cay(D_{10}, S)$	55
3.10	Graf $Cay(D_{10}, S)$	56
3.11	Graf $Cay(Q_{12}, S)$	57
3.12	Graf $Cay(Q_8, S)$	58
3.13	Graf $Cay(Q_8, S)$	60
3.14	Graf $Cay(Q_8, S)$	60
3.15	Graf $Cay(Q_8, S)$	62
3.16	Graf $Cay(Q_8, S)$	62
3.17	Graf $Cay(Q_8, S)$	63
3.18	Graf $Cay(Q_8, S)$	64

DAFTAR LAMBANG

$x \in A$	:	x anggota A
$S \subseteq G$	:	S himpunan bagian (<i>subset</i>) atau sama dengan G
D_{2n}	:	Grup Dihedral
Q_{4n}	:	Grup Quaternion Tergeneralisasi
$Cay(G, S)$	:	Graf Cayley atas grup G
$\mathbb{Z}$	:	himpunan semua bilangan bulat
$\mathbb{R}$	:	himpunan semua bilangan real
■	:	akhir suatu bukti
□	:	produk kartesian graf

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

INTISARI

Struktur Graf Cayley Pada Grup Dihedral dan Grup Quaternion

Tergeneralisasi Valensi 1, 2, 3, 4, dan 5

Oleh

Nabila Rizqika Nurhidayat

21106010034

Graf saat ini sangat menarik untuk dikaji karena pada beberapa waktu tahun terakhir graf mulai digunakan untuk menggambarkan objek diskrit pada sistem bilangan seperti grup. Graf Cayley merupakan suatu graf yang mempresentasikan suatu grup berhingga dengan memandang anggota dari grup sebagai vertek dan dua vertek berbeda misal k dan l *adjacent* jika dan hanya jika $k = ls$ untuk $s \in S$ di mana S subhimpunan dengan syarat $e \notin S$ dan $S^{-1} \subseteq S$. Banyaknya anggota pada subhimpunan S disebut valensi $Cay(G, S)$. Hingga saat ini belum ada kajian yang mengobservasi perbedaan struktur graf Cayley atas grup hiedral dan grup quaternion tergeneralisasi. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan jenis graf Cayley pada grup dihedral D_{2n} valensi 1, 2, 3, 4, dan 5 serta grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} valensi 1, 2, 3, 4, dan 5 dengan menggunakan metode kajian studi literatur. Hasil penelitian menunjukkan bahwa jenis graf Cayley pada grup dihedral D_{2n} dan grup quaternion tergeneralisasi bergantung pada struktur subhimpunan S . Graf Cayley yang dihasilkan pada grup dihedral D_{2n} yaitu graf komplit nK_2 jika $|S| = 1$, graf cycle $\frac{2n}{m}C_m$ dan $\frac{n}{m}C_{2m}$ jika $|S| = 2$, produk kartesius graf $\frac{n}{m}(K_2 \square C_n)$ jika $|S| = 3$, graf tangga segitiga jika $|S| = 4$, dan graf tangga diagonal jika $|S| = 5$. Graf cayley yang dihasilkan pada grup quaternion tergeneralisasi yaitu graf komplit $2nK_2$ jika $|S| = 1$ graf cycle $\frac{4n}{m}C_m$ dan $\frac{2n}{m}C_{2m}$ jika $|S| = 2$, produk kartesius graf $\frac{n}{2m}(K_2 \square C_{4m})$ jika $|S| = 3$, graf tangga segitiga jika $|S| = 4$, dan graf tangga diagonal jika $|S| = 5$.

Kata kunci : Graf Cayley, Grup Dihedral, Grup Quaternion Tergeneralisasi

ABSTRACT

The Structure of Cayley Graphs of Dihedral Groups and Generalized Quaternion Groups of Valencies 1, 2, 3, 4, and 5

By

Nabila Rizqika Nurhidayat

21106010034

Graphs are currently very interesting to study because in recent years graphs have begun to be used to describe discrete objects in numerical systems such as groups. Cayley graph is a graph that describes a group of viewing members of a group as a vertex and two different vertices let k and l adjacent if and only if $k = ls$ for $s \in S$ where S is subset with the conditions $e \notin S$ and $S^{-1} \subseteq S$. This research focuses on the dihedral group D_{2n} valencies 1, 2, 3, 4, and 5 and the generalized quaternion group Q_{4n} valencies 1, 2, 3, 4, and 5 using a literature review approach. Until now, there has been no study that observes the differences in the Cayley graph structure of the hidradral group and the generalized quaternion group. The results of this study indicate that the type of Cayley graph on the dihedral group and the generalized quaternion group depends on the structure of the subset S . Cayley graph generated in the dihedral group D_{2n} , namely complete graph nK_2 if $|S| = 1$, cycle graph $\frac{2n}{m}C_m$ and $\frac{n}{m}C_{2m}$ if $|S| = 2$, cartesius product graph $\frac{n}{m}(K_2 \square C_n)$ if $|S| = 3$, triangle ladder graph if $|S| = 4$, and diagonal ladder graph if $|S| = 5$. Cayley graph generated in the generalized quaternion group Q_{4n} , namely complete graph $2nK_2$ if $|S| = 1$ cycle graph $\frac{4n}{m}C_m$ and $\frac{2n}{m}C_{2m}$ if $|S| = 2$, cartesius product graph $\frac{n}{2m}(K_2 \square C_{4m})$ if $|S| = 3$, triangle ladder graph if $|S| = 4$, and diagonal ladder graph if $|S| = 5$.

Keyword : Cayley Graph, Dihedral Group, Generalized Quaternion Group

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Teori graf muncul sebagai salah satu topik matematika yang menonjol dan menarik perhatian para peneliti dalam beberapa tahun terakhir. Teori graf berkembang sangat pesat bahkan dapat disejajarkan dengan aljabar yang lebih awal berkembang [Santosa, 2002](#). Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit serta relasi yang terjalin di antara objek-objek tersebut. Graf digambarkan dengan mempresentasikan objek sebagai titik atau vertek sedangkan hubungan antar objek direpresentasikan sebagai garis atau edge.

Arthur Cayley merupakan orang pertama yang mendefinisikan konsep grup pada tahun 1854 dan tabel operasi yang dikenal sebagai tabel Cayley. Untuk menggambarkan suatu grup G , Arthur Cayley pada tahun 1878 memperkenalkan konsep graf untuk G berdasarkan himpunan pembangun S , yaitu himpunan sisi berarah dan memandang elemen-elemen di G sebagai vertek, serta vertek k dan l pada grup G akan saling *adjacent* jika dan hanya jika $k = ls$ untuk suatu $s \in S$ [Caucal \(2022\)](#).

Seiring berjalannya waktu, penelitian mengenai representasi grup pada graf banyak dilakukan. Penelitian yang dilakukan oleh [Hadi & Sugeng, 2022](#) menjelaskan tentang graf Cayley atas grup simetri dengan membahas mengenai sifat-sifat dasar dan jenis graf yang terbentuk dari grup simetri dengan subhimpunan pembangkit berupa transposisi dan reversal.

[Juan Daniel & Hariadi, 2022](#) juga meneliti tentang karakteristik subhimpun-

an S dari grup $\mathbb{Z}_n$ yang menghasilkan nilai eigen matriks anti-adjacency dari graf $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ seluruhnya berupa bilangan bulat. [Astri Kumala & Irawan, 2023](#) juga meneliti tentang graf Cayley dari grup dihedral yang berfokus pada menentukan dekomposisi Hamiltonian graf Cayley dengan generator $\{a^{n-1}, b\}$ dari grup dihedral.

[Al-Kaseasbeh & Erfanian, 2021](#) memperkenalkan Graf Cayley yang didefinisikan sebagai suatu graf dengan verteknya merupakan elemen dalam grup, serta subhimpunan S dari G dengan syarat $e \neq s$ dan $S^{-1} \subseteq S$ untuk sebarang k dan l akan saling *adjacent* jika dan hanya jika $k = ls$ untuk suatu $s \in S$. Penelitiannya membahas tentang struktur graf Cayley yang terbentuk dari grup dihedral dengan subhimpunan pembangun tertentu. Hasil penelitiannya diperoleh graf Cayley yang terbentuk dari grup dihedral valensi 1 merupakan graf nK_2 . Sementara graf Cayley yang terbentuk dari grup dihedral valensi 2 dengan $S = \{a, a^{-1}\}$ untuk $a \neq a^{-1}$ merupakan graf $\frac{2n}{m}C_m$ dan $S = \{a, b\}$ untuk $a^2 = b^{-1}e$ merupakan graf $\frac{n}{m}C_2m$. Graf Cayley yang terbentuk dari grup dihedral valensi 3 dengan $S = \{a, a^{-1}, b\}$ merupakan graf $K_2 \square C_n$ dan $S = \{a, a^{-1}, b\}$ untuk $a \neq a^{-1}$ merupakan graf $\frac{n}{m}K_2 \square C_m$. Artikel yang dibuat oleh Al-Kaseasbeh dan Erfanian tersebut, sekaligus menjadi rujukan utama penulis dalam pembuatan skripsi ini.

Skripsi ini akan melanjutkan pembahasan [Al-Kaseasbeh & Erfanian, 2021](#) dengan menambahkan valensi 4 dan 5 serta struktur grup quaternion tergeneralisasi valensi 1, 2, 3, 4, dan 5. Pembahasan dimulai dengan membahas graf Cayley, kemudian dilanjutkan dengan membahas mengenai grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi yang meliputi definisi dan teorema order elemen. Selanjutnya, diakhiri dengan mengkarakterisasi struktur graf Cayley yang terbentuk dari grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5.

1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian adalah struktur graf Cayley pada grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi. Graf Cayley hanya dibatasi dengan definisi dari graf Cayley dan representasi grup bilangan bulat pada graf Cayley. Grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi hanya dibatasi dengan definisi dan teorema order elemen grup. Kemudian dilanjutkan dengan pembahasan struktur graf Cayley yang terbentuk dari grup dihedral dibatasi hanya untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5. Selanjutnya, pembahasan struktur graf Cayley yang terbentuk dari grup quaternion tergeneralisasi hanya dibatasi untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana karakteristik jenis graf dari struktur graf Cayley yang terbentuk pada grup dihedral untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5?
2. Bagaimana karakteristik jenis graf dari struktur graf Cayley yang terbentuk pada grup quaternion tergeneralisasi untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui karakteristik jenis graf dari struktur graf Cayley yang terbentuk pada grup dihedral untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5.
2. Mengetahui karakteristik jenis graf dari struktur graf Cayley yang terbentuk pada grup dihedral untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman tentang karakteristik jenis graf dari struktur graf Cayley yang terbentuk pada grup dihedral untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5.
2. Memberikan pemahaman tentang karakteristik jenis graf dari struktur graf Cayley yang terbentuk pada grup dihedral untuk valensi 1, 2, 3, 4 dan 5.

1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan skripsi ini bersumber dari buku, makalah, jurnal, dan skripsi.

1. Artikel karya Al-Kaseasbeh & Erfanian, 2021 dengan judul *The Structure Cayley Graphs of Dihedral Groups of Valencies 1, 2, and 3* membahas tentang bentuk graf cayley yang terbentuk atas grup dihedral.
2. Artikel karya Morris & Skelton, 2023 dengan judul *Cayley Graphs on Abelian and Generalized Dihedral Group* membahas tentang karakterisasi graf cayley pada grup abelian dan grup dihedral tergeneralisasi.
3. Artikel karya Abdul Gazir Syarifudin, 2020 dengan judul *Some Properties of Coprime Graphs of Dihedral Group When n is a Prime Power* membahas tentang karakteristik graf koprima atas grup dihedral .
4. Artikel karya Adiga & Ariamanesh, 2012 dengan judul *Some Properties of Cayley Graphs on Symmetric Groups S_n* membahas tentang grup simetri dan karakterisasi graf cayley atas grup simetri.

Selanjutnya, akan dijelaskan dalam tabel mengenai persamaan dan perbedaan yang dilakukan penulis dalam penelitiannya dengan rujukan yang sudah ditulis di atas, berikut diberikan tabel persamaan dan perbedaan penelitian.

Tabel 1.1 Tabel Persamaan dan Perbedaan

No	Judul	Penulis	Persamaan	Perbedaan
1.	<i>The Structure Cayley Graphs of Dihedral Groups of Valencies 1, 2, and 3</i>	Al-Kaseasbe dan Ahmad Erfanian	Membahas tentang struktur graf cayley yang terbentuk atas grup dihedral valensi 1, 2, dan 3	Menambahkan valensi 4 untuk grup dihedral dan struktur graf cayley atas grup quaternion tergeneralisasi.
2.	<i>Cayley Graphs on Abelian and Generalized Dihedral Group</i>	Joy Morris dan Adrian Skelton	Graf yang digunakan graf cayley.	Membahas mengenai karakteristik graf cayley atas grup abelian dan grup dihedral tergeneralisasi.

Tabel 1.2 Tabel Persamaan dan Perbedaan

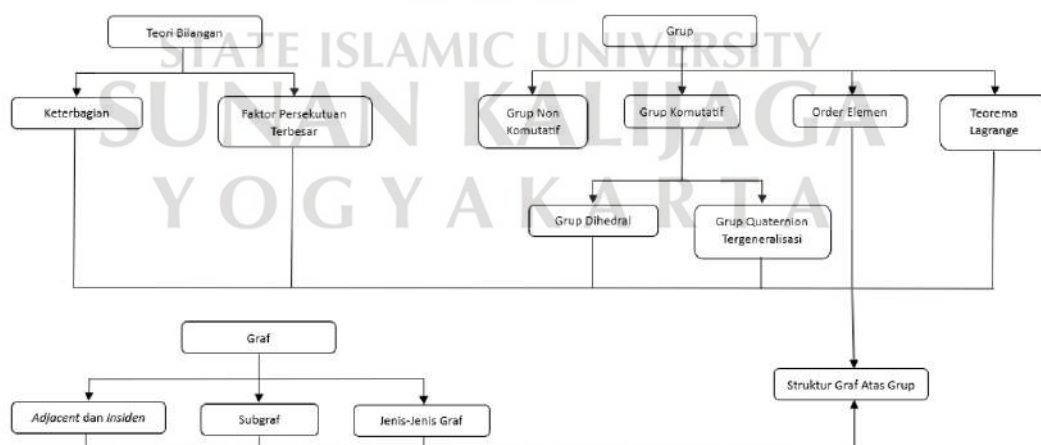
No	Judul	Penulis	Persamaan	Perbedaan
3.	<i>Some Properties of Coprime Graphs of Dihedral Group When n is a Prime Power</i>	Abdul Gazir Syarifudin, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana, Ni Wayan Switrayni, dan Qurratul Aini	Grup yang digunakan adalah grup dihedral.	Membahas mengenai karakteristik graf koprima atas grup dihedral tergeneralisasi.
4.	<i>Some Properties of Cayley Graphs on Symmetric Groups S_n</i>	Chandrashekar Adiga dan Haidar Ariamanesh	Graf yang digunakan adalah graf cayley.	Membahas mengenai karakteristik graf cayley atas grup simetri.

Tinjauan pustaka yang digunakan sebagai rujukan untuk menulis dasar teori mengenai konsep teori bilangan diambil dari sebuah buku yang ditulis oleh [Rajji, 2013](#). Untuk dasar teori grup diambil dari buku karya [DS Malik & Sen, 2007](#). Kemudian, untuk dasar teori graf diambil dari sebuah buku yang ditulis oleh [Munandar, 2022](#). Pembahasan pada penelitian ini diambil definisi grup dihedral dari buku karya [Dummit & Foote, 2004](#). Sementara itu, definisi grup quaternion tergeneralisasi diambil dari artikel karya [Yamasaki, 2016](#).

1.7. Metode Penelitian

Penelitian ini penulis menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku dan jurnal terkait topik penelitian yaitu; konsep dasar graf Cayley, grup dihedral, dan grup quaternion tergeneralisasi. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

1. Membahas konsep dasar dari teori bilangan, teori grup, dan teori graf.
2. Membahas konsep dasar yang ada pada graf Cayley.
3. Membahas grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi yang meliputi definisi dan teorema order dari kedua grup tersebut.
4. Membahas struktur graf Cayley yang terbentuk pada grup dihedral untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5.
5. Membahas struktur graf Cayley yang terbentuk pada grup quaternion tergeneralisasi untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5.



Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab, yaitu sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas tentang dasar-dasar dari teori bilangan, grup dan graf yang mendasari representasi grup hingga pada graf Cayley.
- BAB 3** : Bab ini membahas tentang graf Cayley, grup dihedral, grup quaternion tergeneralisasi, serta struktur graf Cayley pada grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi untuk valensi 1, 2, 3, 4, dan 5.
- BAB 4** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

KESIMPULAN

Bab penutup ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. *Graf cayley merupakan representasi grup berhingga pada graf dengan memandang anggota dari grup sebagai vertek dari graf dan subhimpunan S dari G dengan syarat $e \notin S$ dan $S \subseteq S^{-1}$ untuk sebarang $x, y \in G$, x dan y adjacent jika dan hanya jika $y = xs$ untuk suatu $s \in S$. Adapun jenis graf cayley yang terbentuk atas grup dihedral D_{2n} sebagai berikut:*

- a. Graf cayley atas grup dihedral D_{2n} dengan $S = \{a\}$ di mana $e \notin S$, $s^{-1} = s$ dan $|S| = 1$ membentuk graf komplit nK_2 .*
- b. Graf cayley atas grup dihedral D_{2n} dengan $S = \{a, a^{-1}\}$ di mana $a \neq a^{-1}$, $o(a) = m$, dan $|S| = 2$ membentuk graf cycle $\frac{2n}{m}C_m$.*
- c. Graf cayley atas grup dihedral D_{2n} dengan $S = \{a, b\}$ di mana $a^2 = b^2 = e$, $m = o(ab)$, dan $|S| = 2$ membentuk graf cycle $\frac{n}{m}C_{2m}$.*
- d. Graf cayley atas grup dihedral D_{2n} dengan $S = \{a, a^{-1}, b\}$ di mana $a \neq a^{-1}$, $b^2 = e$, $m = o(a)$, dan $|S| = 3$ membentuk produk kartesian graf $\frac{n}{m}(K_2 \square C_n)$.*

2. Jenis graf cayley yang terbentuk atas grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} sebagai berikut:

- a. Graf cayley atas grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} dengan $S = \{a\}$ di mana $e \notin S$, $s^{-1} = s$ dan $|S| = 1$ membentuk graf komplit $2nK_2$.
- b. Graf cayley atas grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} dengan $S = \{a, a^{-1}\}$ di mana $a \neq a^{-1}$, $o(a) = m$ dan $|S| = 2$ membentuk graf cycle $\frac{4n}{m}C_m$.
- c. Graf cayley atas grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} dengan $S = \{a, b\}$ di mana $a^4 = b^4 = e$, $o(ab) = m$ dan $|S| = 2$ membentuk graf cycle $\frac{2n}{m}C_{2m}$.
- d. Graf cayley atas grup quaternion tergeneralisasi Q_{4n} dengan $S = \{a, a^{-1}, b\}$ di mana $a \neq a^{-1}$, $b^4 = e$, $o(a) = m$ dan $|S| = 3$ membentuk produk kartesian graf $\frac{n}{2m}(K_2 \square C_{4m})$.

4.2. Saran

Saran yang akan penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. Penelitian ini mempresentasikan pada grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi pada graf cayley. Penulis menyarankan untuk melakukan penelitian dengan mengubah grupnya seperti grup bebas torsi, grup abelian, dan lain-lain.
2. Berdasarkan hipotesis pada penelitian ini graf cayley yang terbentuk atas grup dihedral dan grup quaternion tergeneralisasi valensi 4 dan 5 seperti pada yang ditulis pada penelitian ini. Penulis menyarankan untuk menyelidiki lebih lanjut terkait graf cayley yang terbentuk tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdul Gazir Syarifudin, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana, N. W. S. a. Q. A. (2020). *Some properties of coprime graph of dihedral group when n is a prime power*. Journal of Fundamental Mathematics and Applications, 3(1):34–38.
- Adiga, C. & Ariamanesh, H. (2012). *Some properties of cayley graphs on symmetric groups sn* . International Journal of Mathematics, 6(17):807–813.
- Al-Kaseasbeh, S. & Erfanian, A. (2021). *The structure of cayley graphs of dihedral groups of valencies 1, 2, and 3*. Proyecciones Journal of Mathematics.
- Astri Kumala, Hari Susanto, D. R. & Irawan, W. H. (2023). *Decomposition hamilton in cayley graphs with certain invers generator of dihedral- $2n$ group*. Advances in Engineering Research, pages 423–431.
- Caucal, D. (2022). *Cayley graph of basic algebraic structures*. Discrete Mathematics Theoretical Computer Science, 21(1).
- DS Malik, J. N. M. & Sen, M. (2007). Mth 581-582: Introduction to Abstract Algebra. United States of America.
- Dummit, D. S. & Foote, R. M. (2004). Abstract Algebra, volume 3. Wiley Hoboken.
- Hadi, A. & Sugeng, K. A. (2022). *Sifat-sifat graf cayley grup simetri*. Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology, 2(1).
- Juan Daniel, K. A. S. & Hariadi, N. (2022). *Eigenvalues of anti-adjecency matrix of cayley graph*. Indonesian Journal of Combinatorics, 6(1).

Morris, J. & Skelton, A. (2023). Cayley graphs on abelian and generalized dihedral groups. The Art of Discrete and Applied Mathematics.

Munandar, A. (2022). Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf. Sleman : Deepublish (CV Budi Utama).

Raji, W. (2013). An Introductory Course in Elementary Number Theory. The Saylor Foundation.

Santosa, R. (2002). Aplikasi teorema polya pada enumerasi graf sederhana. Online):(http://. Home. Unpar. ac. id/-integral/volume 8/integral 8 No. 1/Aplikasi Teorema Polya. PDF. Diakses tanggal 4 Januari 2008)., 8.

Yamasaki, Y. (2016). Ramanujan cayley graphs of the generalized quaternion groups and the hardy-littlewood conjecture. Mathematical Modelling for Next-Generation Cryptography.