

**SKRIPSI**

**DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF THETA SERAGAM**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA**

**2025**

# **DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF THETA SERAGAM**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan  
mencapai derajat Sarjana S-1  
Program Studi Matematika



diajukan oleh

**LAILATUL ULLA SAFITRI**

**21106010001**

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

2025



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Lailatul Ulla Safitri

NIM : 21106010001

Judul Skripsi : Dimensi Metrik Sisi pada Graf Theta Seragam

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 9 Mei 2025

Pembimbing I

Pembimbing II

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom

NIP : 19720423 199903 1 003

Deddy Rahmadi, M.Sc.

NIP. 19930807 202203 1 001



## PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1090/Un.02/DST/PP.00.9/06/2025

Tugas Akhir dengan judul : DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF THETA SERAGAM

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : LAILATUL ULLA SAFITRI  
Nomor Induk Mahasiswa : 21106010001  
Telah diujikan pada : Senin, 26 Mei 2025  
Nilai ujian Tugas Akhir : A-

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

### TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom  
SIGNED

Valid ID: 684aa2df46c9d



Penguji I

Deddy Rahmadi, M.Sc.  
SIGNED

Valid ID: 683e7447315af



Penguji II

Arif Munandar, M.Sc.  
SIGNED

Valid ID: 684a467910a73



Yogyakarta, 26 Mei 2025  
UIN Sunan Kalijaga  
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.  
SIGNED

Valid ID: 684f88ca64874



## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Lailatul Ulla Safitri  
NIM : 21106010001  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

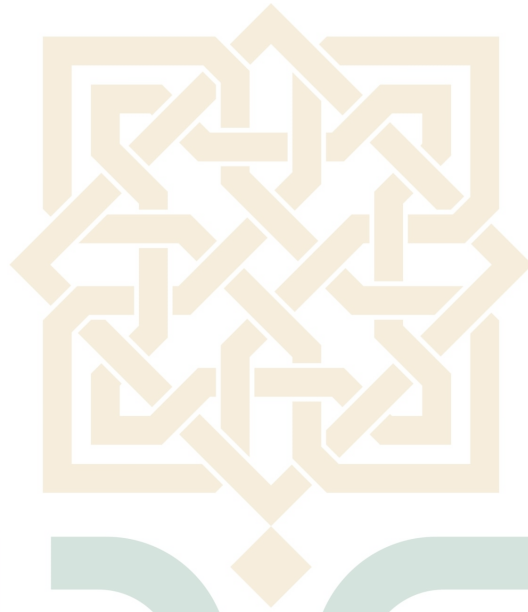
Yogyakarta, 9 Mei 2025



Lailatul Ulla Safitri

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## HALAMAN PERSEMBAHAN



*Alhamdulillah* karya ini salah satu bentuk rasa syukur saya kepada Allah SWT yang telah memberikan kemudahan dan pertolongan sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan baik. Penulis mempersembahkan karya tulis sederhana ini kepada kedua orang tua penulis, diri saya sendiri, keluarga tercinta dan Almamater UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

## HALAMAN MOTTO

”BANGUN”

”Sesuatu yang telah diawali, maka harus diakhiri”

”kan kukejar mimpi, dan kuterbang tinggi, tak ada kata tidak ’ku pasti bisa”

”*Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan*” (Q.S Al-Insyirah:5)

”*Letakkan aku di dalam hatimu, maka aku akan meletakkanmu dalam hatiku*”

(Q.S Al-Baqarah:152)

”Loving yourself is giving yourself what you want someone else to”

”*Beranilah untuk selalu mencoba di setiap kesempatan yang ada dan janganlah takut untuk gagal, karena kegagalan salah satu proses kesuksesan*”-Lalapoo

”*Jadikanlah akhirat di hatimu, dunia di tanganmu, dan kematian di pelupuk matamu*” - Imam Syafi’i

”*Keberhasilan bukanlah milik orang pintar, keberhasilan adalah milik mereka yang senantiasa berusaha*”-BJ Habibie

”Sesibuk apapun kamu jangan tinggalkan sholat”-Mama

## PRAKATA

*Allhamdulillahirabbil 'Alamin*, segala puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "*Dimensi Metrik Sisi Pada Graf Theta Seragam*". Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita, Rasulullah Shallallahu 'Alaihi wa Sallam serta keluarga, para sahabat yang menjadi suri tauladan kita. Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penyusunan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Teristimewa kepada Cinta pertama dan panutan penulis yaitu Muhammad Ahmadi dan Pintu Surga penulis Ibunda Sudarmi selaku orang tua penulis yang selalu membuat penulis percaya bahwa mampu untuk menyelesaikannya, dukungan serta selalu mendoakan kebaikan kepada penulis menjadi salah satu kekuatan terbesar bagi penulis untuk terus berusaha sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan tuntas.
2. Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.



3. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi *Matematika* Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Sri Utami Zuliana, S.Si., M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
5. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., dan Deddy Rahmadi, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi, yang dengan penuh kesabaran telah memberikan bimbingan, arahan, serta koreksi yang sangat berharga selama proses penyusunan skripsi ini. Keduanya juga telah meluangkan banyak waktu untuk membimbing dan membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen dan Staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.
7. Saudara kandung penulis, Ludhfatul dan Ahmad Irkham telah menjadi penyemangat, motivasi, dan alasan penulis untuk menyelesaikan tugas akhir hingga tuntas. Tak lupa juga Keluarga Besar baik dari keluarga Ibunda maupun keluarga Ayah yang senantiasa memberikan dukungan dan doa yang telah diberikan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Grup Kiwkiww, Faiqotul Muna dan Dewi Rohmawati, Sahabat tercinta yang senantiasa hadir dalam setiap langkah perjalanan penulis, dukungan, motivasi, dan kebersamaan telah menjadi kekuatan besar yang tak tergantikan bagi penulis. Terima kasih telah menjadi tempat berbagi cerita, penyemangat di saat sulit, serta pengingat untuk terus berusaha hingga skripsi ini selesai. Persahabatan ini adalah karunia berharga yang akan selalu penulis kenang dan syukuri sepanjang hidup

9. Grup KELUARGA PAK UDIN sahabat penulis dibangku perkuliahan yang selalu kebersamai proses dalam empat tahun ini, yaitu Sindi Lestari, Muna, Novan Baktiar Rizky, Rendi Ferianta, Hafizh Naufal, Hamas Abdilah yang banyak membantu penulis dalam penulisan tugas akhir dan memberikan motivasi.
10. Sahabat-sahabat penulis, yaitu Della Rahmawati, Hunu Theresa, Dian Eka, Lidot, Mums, serta teman-teman seperbimbingan yang selalu memberikan semangat kepada penulis, menemani setiap proses, memberikan dukungan, motivasi dan menjadi tempat keluh kesah penulis. Tak lupa teman-teman UKM Al Mizan terkhususnya Mizan Asik dan Tilawah Sehat, Kos HLP Muslimah yang telah memberikan semangat dan mewarnai hidup penulis.
11. Keluarga besar mahasiswa Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga, Terkhususnya Matematika angkatan 2021 yang telah menjadi bagian penting dari perjalanan selama masa studi. Kebersamaan, dukungan, diskusi, serta semangat yang kalian berikan tidak hanya membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini, tetapi juga menciptakan kenangan berharga yang akan selalu dikenang. Terima kasih telah menjadi teman yang selalu saling mendukung di setiap suka dan duka selama menempuh pendidikan ini.
12. Teman-Teman Konsentrasi Aljabar yang telah banyak membantu dan memotivasi penulis selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
13. Teman-teman KKN 332 Jayagiri tak lupa juga teman teman KKN 114 Kolaborasi Bandung yang telah memberikan semangat dan motivasi pada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Terimakasih telah menjadi bagian hidup penulis.

14. Teruntuk teman-teman penulis yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu dan teman penulis juga yang selalu bertanya *"kapan skripsinya selesai?"* terimakasih telah memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
15. Teruntuk seseorang yang belum diketahui namanya dengan jelas, namun tertulis jelas di *Lauhul Mahfudz*. Terimakasih sudah menjadi salah satu motivasi penulis untuk menyelesaikan tugas akhir sebagai upaya memantaskan diri, Semoga kelak berjumpa di waktu terbaik meskipun saat ini entah di belah bumi mana dirimu berada dan menggenggam tangan siapa. Seperti kata BJ Habibie *"kalaupun memang dia dilahirkan untukku, mau bagaimanapun aku yang dapat"*.
16. Teruntuk manusia Favorit yang penulis temui di 13 Februari 2024, terimakasih telah menemani penulis sebelum dan disaat proses penyusunan tugas akhir ini, terimakasih untuk rasa yang pernah hadir, dan memberikan kebahagiaan maupun sebaliknya untuk penulis. Ternyata perginya kamu cukup memberikan memotivasi dan memberikan semangat kepada penulis untuk terus maju dan berproses menjadi pribadi yang jauh lebih baik, dewasa, serta menjadi pribadi yang lebih memahami setiap masa ada orangnya dan setiap orang ada masanya.
17. Terakhir, untuk wanita sederhana yang memiliki banyak keinginan namun terkadang sulit untuk dimengerti, seorang anak sulung yang keras kepala tapi terkadang sifatnya seperti anak kecil pada umumnya, yaitu diri saya sendiri Lailatul Ulla Safitri terimakasih sudah bertahan, berjuang, dan bekerja keras sejauh ini. Apresiasi sebesar-besarnya karena telah bertanggung jawab untuk menyelesaikan apa yang telah dimulai. Terimakasih karena terus berusaha dan tidak menyerah, serta senantiasa menikmati segala prosesnya. Terimaka-

sih untuk segala perjuangan, kesabaran, ketekunan yang telah dilalui dalam setiap langkah yang penuh tantangan ini. Kamu wanita hebat, penulis bangga kamu bisa menyelesaikan perjalanan panjang ini, meskipun tak jarang air mata dan kegelisahan datang menghampiri, bahkan tak mudah untuk sampai di titik sekarang yang selalu terus maju walaupun jalan terasa berat dan banyak resiko. Terimakasih ya sudah hadir di dunia dan sudah mau bertahan sampai sejauh ini, berbahagialah selalu kapanpun dan dimanapun kamu berada, La-la. Bawalah Senyum manismu itu, rayakanlah kehadiranmu, jadilah cahaya dimanapun kamu berada.

18. Teruntuk Presiden Jomblo yaitu mas Hasantoysss, terimakasih telah memberikan semangat dan menemani hari-hari penulis dalam penyusunan tugas akhir, dan teruntuk Aftershine, NDX AKA, Denny Caknan, Guyon Waton, LAVORA terimakasih atas lagu-lagunya yang sudah menjadi playlist untuk menemani penulis dalam menyusun tugas akhir.
19. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung terimakasih untuk peran dan semangat serta membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 26 Mei 2025

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR</b>	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	<b>iii</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN</b>	<b>iv</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	<b>v</b>
<b>HALAMAN MOTTO</b>	<b>vi</b>
<b>PRAKATA</b>	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR LAMBANG</b>	<b>xvii</b>
<b>INTISARI</b>	<b>.xviii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xix</b>
<b>I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	5
1.3. Rumusan Masalah	6
1.4. Tujuan Penelitian	6
1.5. Manfaat Penelitian	6
1.6. Tinjauan Pustaka	7
1.7. Metode Penelitian	9
1.8. Sistematika Penulisan	13
<b>II DASAR TEORI</b>	<b>14</b>
2.1. Graf dan Terminologi Graf	14
2.2. Adjacent dan Incident	17
2.3. Jenis-Jenis Graf	18
2.4. Definisi Jarak	20

<b>III PEMBAHASAN</b>	<b>22</b>
3.1. Konsep Dasar Dimensi Metrik dan Dimensi Metrik Sisi	22
3.2. Penentuan Dimensi Metrik Sisi pada Graf Theta Seragam	36
<b>IV APLIKASI DIMENSI METRIK DAN DIMENSI METRIK SISI PADA PENEMPATAN POS PEMADAM KEBAKARAN</b>	<b>101</b>
4.1. Profil Kabupaten Boyolali	102
4.2. Menentukan Lokasi Pos Pemadam Kebakaran di Wilayah Boyolali	103
4.2.1. Penentu Dimensi Metrik pada Graf Terhubung Wilayah Bo- yolali	107
4.2.2. Penentu Dimensi Metrik Sisi pada Graf Terhubung Wilayah Boyolali	108
<b>V PENUTUP</b>	<b>110</b>
5.1. Kesimpulan	110
5.2. Saran	111
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>112</b>
<b>LAMPIRAN</b>	<b>116</b>
<b>A DATA TABEL JARAK</b>	<b>116</b>
<b>Curriculum Vitae</b>	<b>123</b>

## DAFTAR TABEL

1.1	Tabel Perbedaan dan Persamaan penelitian . . . . .	9
3.1	Tabel jarak . . . . .	23
3.2	Tabel jarak $P_7$ . . . . .	25
3.3	Tabel jarak edge terhadap verteks . . . . .	30
3.4	Tabel representasi jarak edge terhadap verteks . . . . .	38
4.1	Penamaan Verteks Graf Wilayah Kabupaten Boyolali . . . . .	105
4.2	Penamaan Edge Graf Wilayah Kabupaten Boyolali . . . . .	105

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## DAFTAR GAMBAR

1.1	Flowchart Metode Penelitian . . . . .	11
1.2	Flowchart Metode Penelitian pada Penerapan . . . . .	12
2.1	Graf $G$ secara umum . . . . .	15
2.2	Graf Ganda $G_2$ . . . . .	15
2.3	Graf Terhubung . . . . .	17
2.4	Graf Sederhana . . . . .	18
2.5	Graf Lengkap . . . . .	19
2.6	Graf Path dengan $P_4$ . . . . .	19
2.7	Graf Terhubung . . . . .	19
2.8	Graf Cycle $C_5$ . . . . .	20
2.9	Graf Terhubung . . . . .	21
3.1	Graf $G$ . . . . .	23
3.2	Graf Lintasan $P_7$ . . . . .	24
3.3	Graf $C_6$ . . . . .	27
3.4	Graf $C_7$ . . . . .	28
3.5	Graf Terhubung $G$ . . . . .	29
3.6	Graf Lintasan $P_7$ . . . . .	31
3.7	Graf $C_6$ . . . . .	34
3.8	Graf $G$ . . . . .	35
3.9	Graf Theta Seragam $\theta(3; 3)$ . . . . .	36
3.10	Graf Theta Tak Seragam $\theta(3; (2, 0, 3))$ . . . . .	37
3.11	Graf Theta Seragam $\theta(n; m)$ . . . . .	41
3.12	Graf Theta Seragam $\theta(6; m)$ . . . . .	87
4.1	Peta Wilayah Kabupaten Boyolali . . . . .	103
4.2	Graf Peta Wilayah Kabupaten Boyolali . . . . .	104



4.3	Graf Terhubung Kabupaten Boyolali . . . . .	106
-----	---	-----



## DAFTAR LAMBANG

$v \in V$	: $v$ anggota $V$
$d(u, v)$	: jarak antar verteks $u$ dan $v$
$d_E(u, e)$	: jarak antar verteks $u$ ke edge $e$
$E(G)$	: edge yang menghubungkan dua verteks dalam $G$
$V(G)$	: suatu verteks dalam $G$
$n \geq 3$	: $n$ lebih dari sama dengan 3
$W$	: himpunan pembeda pada dimensi metrik
$W_e$	: himpunan pembeda pada dimensi metrik sisi
$W \subseteq V(G)$	: $W$ himpunan bagian ( <i>subset</i> ) atau sama dengan $V(G)$
$r(v W)$	: nilai dari verteks $v$ terhadap himpunan pembeda
$r(e W_e)$	: nilai dari edge $e$ terhadap himpunan pembeda
$\dim(G)$	: dimensi metrik pada graf $G$
$\text{edim}(G)$	: dimensi metrik sisi pada graf $G$
$\cong$	: tidak kongruen atau sama dengan
$\neq$	: tidak sama dengan
$ W_e $	: kardinalitas dari himpunan pembeda pada dimensi metrik sisi
■	: akhir suatu bukti
$\rightarrow$	: menuju
$\Leftrightarrow$	: jika dan hanya jika
$\theta(n; m)$	: graf theta seragam yang diperumum

## INTISARI

### DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF THETA SERAGAM

Oleh

Lailatul Ulla Safitri

21106010001

Misalkan  $G = (V, E)$  merupakan graf terhubung dan sederhana dengan himpunan verteks  $V(G)$  dan himpunan edge  $E(G)$ . Dalam graf, diperkenalkan konsep himpunan pembeda, yaitu himpunan verteks  $W_e \subseteq V(G)$  yang sedemikian sehingga setiap edge dalam graf memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap  $W_e$ . Dengan kata lain, untuk setiap edge yang berbeda, terdapat satu verteks dalam  $W_e$  yang memiliki jarak berbeda terhadap edge. Nilai kardinalitas minimum dari himpunan pembeda disebut sebagai dimensi metrik sisi dari graf tersebut. Penelitian ini menggunakan pendekatan struktur graf dan konsep jarak edge dan verteks untuk menentukan dimensi metrik sisi pada suatu graf. Penelitian ini menggunakan graf theta, yang merupakan gabungan dari beberapa graf lintasan. Graf theta seragam dinotasikan  $\theta(n, m)$  jika semua jalur yang menghubungkan kedua kutub memiliki jumlah verteks yang sama.

**Kata kunci :** Jarak, Dimensi metrik sisi, himpunan pembeda, Graf Theta

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## ABSTRACT

### EDGE-METRIC DIMENSIONS OF UNIFORM THETA GRAPH

By

Lailatul Ulla Safitri

21106010001

Let  $G = (V, E)$  be a simple connected graph with a vertex set  $V(G)$  and an edge set  $E(G)$ . In this graph, the concept of an *edge metric generator* is introduced, which is a subset of vertices  $W_e \subseteq V(G)$  such that each edge in the graph has a unique distance representation with respect to  $W_e$ . In other words, for every pair of distinct edges, there exists at least one vertex in  $W_e$  that has a different distance to each edge. The minimum cardinality of an edge metric generator is called the *edge metric dimension* of the graph. This study adopts a structural graph approach and the concept of distances between edges and vertices to determine the edge metric dimension of a graph. The focus is on *theta graphs*, which consist of multiple paths connecting two terminal vertices. A *uniform theta graph* is denoted by  $\theta(n, m)$ , where all  $m$  paths connecting the two terminals have the same number of vertices,  $n$ , in each path.

**Keyword :** Distance, Edge Metric Dimension, Resolving Set, Theta Graph



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika adalah ilmu dasar yang sangat berperan dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi masa kini. Perkembangan ilmu matematika terus muncul dengan tantangan baru di berbagai lapangan, baik dari matematika murni yang mempelajari teori-teori abstrak sampai matematika terapan yang difokuskan pada pemecahan masalah nyata, keduanya memberikan dampak besar. Salah satu cabang penting adalah matematika diskrit, yang membahas struktur diskrit seperti graf, himpunan, algoritma dan lain-lain. Aplikasi cabang ini cukup luas, terutama dalam ilmu komputer, teori jaringan, dan kriptografi.

Teori graf diperkenalkan oleh seorang ahli matematika dari Swiss yang bernama Leonhard Euler pada abad ke-18 untuk memecahkan masalah jembatan Königsberg yang dikenal dengan *Seven Bridges of Königsberg*. Jembatan Königsberg terletak di kota Königsberg, sebelah timur Prussia, Jerman sekarang di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa dimana Euler membuktikan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melewati setiap jembatan tepat satu kali. Permasalahan ini kemudian diselesaikan secara matematis melalui konsep derajat verteks, yang menyatakan bahwa agar seseorang dapat melewati setiap edge tepat satu kali, maka setiap verteks harus memiliki derajat genap. Hal ini berkaitan dengan Lema Jabat Tangan, yang menyatakan bahwa jumlah derajat verteks pada suatu graf adalah genap dan sama dengan dua kali jumlah edge. Dengan demikian, jika terdapat verteks yang

memiliki derajat ganjil, maka banyaknya verteks ganjil dalam graf adalah genap. Lema ini menjadi landasan penting dalam memahami struktur dasar graf dan keterhubungannya (Shofi 2021). Tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824 – 1887) berhasil mengembangkan teori pohon (*Theory of Trees*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Coyley (1821 – 1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan permasalahan kimia yaitu hidrokarbon. Pada era Kirchoff dan Cayley, berkembang secara signifikan dalam teori graf. Salah satunya adalah konjektur empat warna, yang menyatakan bahwa untuk mewarnai sebuah peta, hanya diperlukan empat warna sehingga setiap wilayah yang berbatasan tidak memiliki warna yang sama (Suryadi dan Nanang, 2008).

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang mempelajari struktur yang menggambarkan hubungan antar objek melalui titik (*verteks*) dan sisi (*edges*). Sebuah graf  $G$  dapat dinyatakan sebagai pasangan  $G = (V, E)$ , di mana  $V$  adalah himpunan titik (*verteks*) dan  $E$  adalah himpunan sisi yang menghubungkan 2 titik dalam  $V$ . Graf sering digunakan dalam merepresentasikan objek diskrit serta hubungan antar objek tersebut. Objek yang digambarkan sebagai titik, sedangkan hubungan antar objek direpresentasikan sebagai garis maupun sisi. Konsep ini memiliki kaitan yang erat dengan jarak atau metrik. Dimensi metrik merupakan salah satu aspek penting dalam teori graf, serta menjadi topik menarik yang telah banyak menjadi fokus penelitian.

Dimensi metrik graf pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975, kemudian dikaji oleh F. Harary dan R. A. Melter pada tahun 1976. Setelah itu, seiring dengan perkembangannya yang cukup pesat, banyak penelitian yang mengkaji tentang dimensi metrik (Singh dkk, 2021). Terdapat beberapa istilah dalam dimensi metrik, salah satunya adalah himpunan pembeda. Himpunan pembeda (*resolving*

*set*) merupakan himpunan verteks pada graf jika setiap verteks pada graf tersebut mempunyai representasi jarak yang berbeda. Banyak penelitian yang membahas tentang dimensi metrik, seperti dimensi metrik amalgamasi graf theta (Dess Wellyanti dkk, 2023), dimensi metrik pada graf barbel (Rahmadi dan Tri Atmojo, 2014), dimensi metrik pada graf buku ganda (Nur Ilmayasinta, 2019), *On Metric Dimension of Edge-Corona Graphs* (Rinurwati dkk, 2017), *Edge Metric Dimension on Some Families of Tree* (Adawiyah dkk, 2018), dimensi metrik lokal pada graf antiprisma dan graf sun (Silfiatul dan Tri Atmojo, 2018), dimensi metrik lokal dari hasil perkalian perkalian kuat graf bintang (Azka dkk., 2022), dimensi k-metrik pada graf parasut yang diperumum (Rahmadi dan Susanti, 2024) dan lain sebagainya. Dimensi metrik sisi merupakan pengembangan dari dimensi metrik yang pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 dan secara terpisah oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 (Adawiyah dkk., 2020). Jarak yang dimaksud adalah jumlah sisi pada lintasan terpendek yang menghubungkan titik tertentu dengan salah satu ujung sisi. Konsep awal pada dimensi metrik sisi adalah mencari himpunan penentu sisi semimumimum mungkin pada suatu graf  $G$ , sedemikian sehingga terdapat representasi jarak yang berbeda dari setiap sisi pada graf  $G$ . Dimensi metrik menggunakan konsep jarak antar titik, sedangkan dimensi metrik sisi berfokus pada jarak antara sisi dan titik dalam suatu graf. Sama halnya dimensi metrik, dimensi metrik sisi juga memiliki himpunan pembeda (*resolving set*).

Penelitian-penelitian yang telah disebutkan menjadi dasar acuan dalam mencari dimensi metrik sisi pada kelas graf yang lain. Kelas yang diteliti dalam penelitian ini adalah graf theta seragam. Graf Theta merupakan salah satu graf yang menarik, dimana graf tersebut merupakan penggabungan dari beberapa graf lintasan yang menghasilkan suatu graf baru yang disebut graf theta, dimana graf theta memiliki

struktur sederhana dengan 2 verteks ujung terhubung di setiap lintasan. Graf theta merupakan graf yang terdiri atas tiga lintasan yang saling lepas dan setiap ujung lintasan terkait dengan verteks yang disebut titik kutub. Graf theta dinotasikan dengan  $\theta(3, m)$  dengan  $m$  adalah banyaknya titik pada masing-masing lintasan. Graf theta dikatakan seragam jika jumlah lintasan  $\geq 3$  dan jumlah verteks di setiap lintasan memiliki jumlah yang sama dengan kata lain memiliki panjang lintasan yang sama di setiap lintasan.

Konsep dimensi metrik sendiri telah diaplikasikan oleh beberapa peneliti dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan nyata contohnya Slater mengaitkan permasalahan dimensi metrik dengan masalah jaringan, sementara Chartrand mengaplikasikan himpunan pembeda dalam dimensi metrik pada bidang kimia. Pada penelitian ini konsep dimensi metrik dan dimensi metrik sisi akan diaplikasikan pada penempatan lokasi yang optimal untuk Pos Pemadam Kebakaran (Pos Damkar) di wilayah Kabupaten Boyolali. Boyolali merupakan salah satu kabupaten yang ada di Jawa Tengah, Boyolali juga mengalami perkembangan pesat dalam berbagai sektor, termasuk industri, pertanian, peternakan, dan infrastruktur publik. Seiring dengan pertumbuhan tersebut, risiko kebakaran juga meningkat, terutama di kawasan padat penduduk, area industri, dan lahan kering yang rawan terbakar.

Dalam menghadapi ancaman tersebut, ketersediaan dan penyebaran fasilitas penanggulangan kebakaran menjadi aspek yang sangat penting. Saat ini, Kabupaten Boyolali hanya memiliki tiga Pos Pemadam Kebakaran yang bertugas melayani seluruh wilayah kabupaten. Jumlah ini masih tergolong minim jika dibandingkan dengan luas wilayah dan tingkat pertumbuhan daerah. Penerapan ini bertujuan untuk meminimalkan jarak antara lokasi kebakaran dengan Pos Pemadam tidak terlalu jauh, sehingga respons terhadap kejadian kebakaran dapat dilakukan dengan lebih

cepat dan efisien. Dengan menempatkan Pos Damkar di lokasi yang strategis, diharapkan waktu tempuh menuju lokasi kebakaran dapat dikurangi, sehingga upaya pemadaman dan penyelamatan dapat berlangsung lebih efektif. Namun, beberapa algoritma penempatan yang telah diterapkan sebelumnya masih belum mampu memberikan hasil yang optimal.

Sejauh ini belum ada penelitian yang membahas tentang dimensi metrik sisi pada graf theta seragam. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas tentang dimensi metrik sisi pada graf theta seragam, dengan memperkenalkan konsep dasar dimensi metrik sisi serta membahas konsep dari graf theta seragam. Kemudian akan dibahas mengenai penelitian dalam menentukan dimensi metrik sisi menjadi rumus umum dengan verteks sebanyak  $m$  pada suatu  $n$  lintasan pada graf theta seragam. Selanjutnya akan membahas salah satu penerapan dimensi metrik dan dimensi metrik sisi pada penempatan Pos Pemadam Kebakaran.

## 1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada tugas akhir ini adalah mencari dimensi metrik sisi pada suatu graf, graf yang menjadi objek pada penelitian ini adalah graf theta seragam untuk  $n$  banyaknya lintasan, dimana  $n = 3, 4, 5, 6$ , dan sebanyak  $m$  verteks. Pada penerapan dimensi metrik dan dimensi metrik sisi dalam penempatan lokasi Pos Pemadam Kebakaran di wilayah Boyolali, perhitungan dilakukan dengan mengabaikan jarak sebenarnya dan hanya berfokus pada jarak lokasi (kecamatan) yang menghubungkan lokasi-lokasi terdekat. Penerapan ini mempertimbangkan keterkaitan antara titik-titik strategis tanpa memperhitungkan jarak geografis secara langsung, sehingga analisis lebih menitikberatkan pada hubungan antar lokasi kecamatan dalam peta. Dengan demikian, keputusan penempatan Pos Pemadam lebih didasarkan pada konektivitas antar wilayah daripada jarak tempuh sebenarnya.

### 1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep dasar tentang dimensi metrik sisi pada suatu graf?
2. Bagaimana menentukan dimensi metrik sisi pada graf theta seragam ?
3. Bagaimana penerapan dimensi metrik dan dimensi metrik sisi dalam menentukan lokasi Pos Pemadam Kebakaran di Kabupaten Boyolali?

### 1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari tentang konsep dasar dimensi metrik sisi pada suatu graf.
2. Untuk menentukan dimensi metrik sisi pada graf theta seragam.
3. Mengetahui salah satu penerapan dimensi metrik dan dimensi metrik sisi dalam menentukan lokasi Pos Pemadam Kebakaran di Kabupaten Boyolali.

### 1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Memberikan pemahaman tentang konsep dasar dimensi metrik sisi dan graf theta seragam.
2. Menentukan rumus umum dimensi metrik sisi pada graf theta seragam.
3. Mengetahui salah satu penerapan dari dimensi metrik dan dimensi metrik sisi dalam kehidupan nyata.



## 1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan skripsi ini bersumber dari jurnal sebagai berikut:

1. Jurnal Karya Rinurwati dan R E Nabila (2021) dengan judul *"Metric and Edge Metric Dimensions of Bobble-Neighbourhood-Corona Graphs"* yang membahas tentang konsep dimensi metrik dan dimensi metrik sisi.
2. Jurnal karya Riyan Wicaksana Putra dan Yeni Susanti (2018) dengan judul *"On Total Edge Irregularity Strength of Centralized Uniform Theta Graphs"* membahas tentang konsep graf theta seragam. Penelitian ini mengenalkan konsep yang berhubungan dengan bagaimana kekuatan ketidakaturan tepi pada graf.
3. Jurnal karya Dess Welyyanti, Alifaziz Arsyad, dan Lyra Yulianti (2023) dengan judul *"Dimensi Metrik Amalgamasi Graf Theta"* membahas tentang hubungan graf theta dengan dimensi matrik. Penelitian ini memberikan pemahaman bagaimana amalgamasi pada graf theta dapat dihitung dengan dimensi metrik, kemudian teorema yang mendukung dimensi metrik graf theta.

Penelitian yang dilakukan oleh Rinurwati dan Nabila (2021) membahas mengenai dimensi metrik dan dimensi metrik sisi pada graf bobble-neighbourhood-corona dengan operasi neighbourhood-corona antara graf  $G$  dan graf trivial  $H = K_1$ . Penelitian Rinurwati dan nabila menganalisis dua kelas graf  $G$ , yaitu graf Lengkap  $K_n$  dan graf siklus  $C_n$  dengan  $n$  bilangan ganjil. Untuk graf  $K_n * K_1$ , dimensi metriknya adalah  $\dim(K_n * K_1) = n - 1$  dan dimensi metrik sisi adalah

$edim(K_n * K_1) = 2(n - 1)$ , dan untuk graf  $C_n * K_1$  diperoleh bahwa,

$$\dim(C_n * K_1) = \begin{cases} 2 & \text{jika } n = 3 \\ 3 & \text{jika } n = 5 \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil & \text{jika } n \geq 7 \end{cases}$$

dan

$$edim(C_n * K_1) = \begin{cases} 4 & \text{jika } n = 3, 5, 7, 9 \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil & \text{jika } n \geq 11 \end{cases}$$

Penelitian yang dilakukan oleh Riyan dan Yeni (2018) membahas mengenai nilai kekuatan ketidakteraturan tepi total pada graf theta seragam, dimana graf theta seragam ini memiliki 2 kutub yang dihubungkan oleh jalur internal dengan jumlah verteks yang sama. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai kekuatan ketidakteraturan tepi total mengikuti pola tertentu.

Penelitian yang dilakukan oleh Dess Welyanti dkk (2021) membahas mengenai dimensi metrik pada graf theta dengan cara amalgamasi. Dalam penelitian ini menggunakan operasi amalgamasi dengan cara menggabungkan salah satu titik pada kutub graf theta dengan beberapa graf theta. Hasil dari dimensi metrik graf theta dengan  $n \geq 3$  adalah 3, dimana  $n$  disini merupakan banyaknya verteks di suatu lintasan. Kemudian, diperoleh dimensi metrik dari amalgamasi graf theta yang dinotasikan  $H = Amal\{m\theta n | m \geq 2, n \geq 3\}$  adalah  $3m - 1$ . Selain itu juga diperoleh dimensi metrik amalgamasi graf kipas dan graf lintasan  $Amal(F_n, P_m)$  adalah  $n - 2$ .

Selanjutnya pada penelitian ini akan membahas mengenai dimensi metrik sisi pada graf theta seragam, yang dinotasikan dengan  $\theta(n; m)$  dimana  $n$  merupakan

banyaknya lintasan dan  $m$  banyaknya jumlah verteks pada setiap lintasan.

Penelitian yang dilakukan oleh penulis, terdapat perbedaan dengan penelitian sebelumnya. Selanjutnya, akan ditunjukkan perbedaan dan persamaan yang dilakukan penulis dalam penelitiannya pada tinjauan pustaka. Berikut diberikan tabel perbedaan dan persamaan penelitian.

No	Judul	Penulis	Persamaan	Perbedaan
1	Metric and edge-metric dimensions of bobble-neighbourhood-corona graphs	Rinurwati, dan R E Nabila	Membahas mengenai konsep dasar dimensi metrik dan dimensi metrik sisi	Membahas mengenai dimensi metrik sisi pada graf theta seragam
2	On total edge irregularity strength of centralized uniform theta graphs	Riyan Wicaksana, dan Yeni Susanti	Membahas mengenai konsep dasar graf theta seragam	Membahas mengenai dimensi metrik sisi dari konsep dasar graf theta seragam
3	Dimensi Metrik Amalgamasi Graf Theta	Dess Welyyanti, Alifaziz Arsyad dan Lyra Yulianti	Membahas mengenai konsep graf theta untuk suatu verteks lebih dari 3	Membahas mengenai dimensi metrik sisi pada graf theta seragam yang diperumum untuk suatu verteks dan untuk jalur lintasan $n = 3, 4, 5, 6$

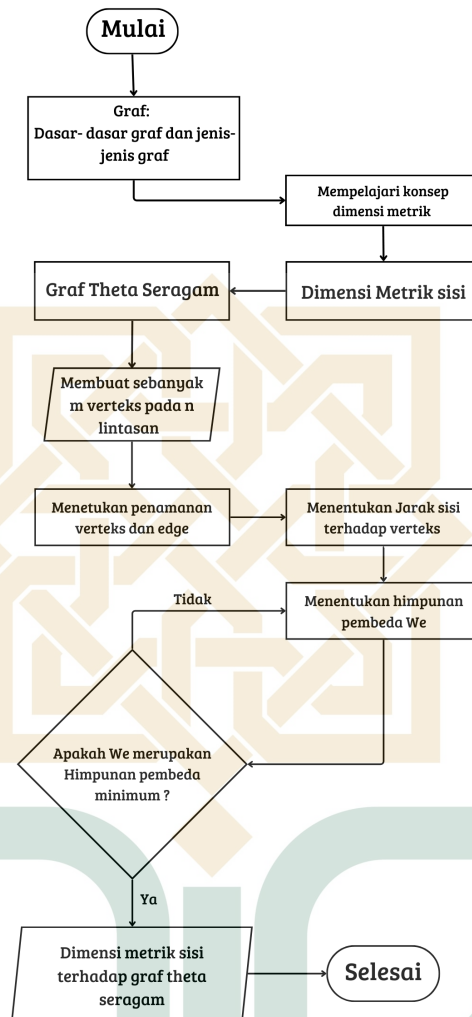
Tabel 1.1 Tabel Perbedaan dan Persamaan penelitian

### 1.7. Metode Penelitian

Pada penelitian ini penulis menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal terkait topik penelitian yaitu; konsep dasar graf theta seragam, dimensi metrik sisi pada graf theta seragam. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

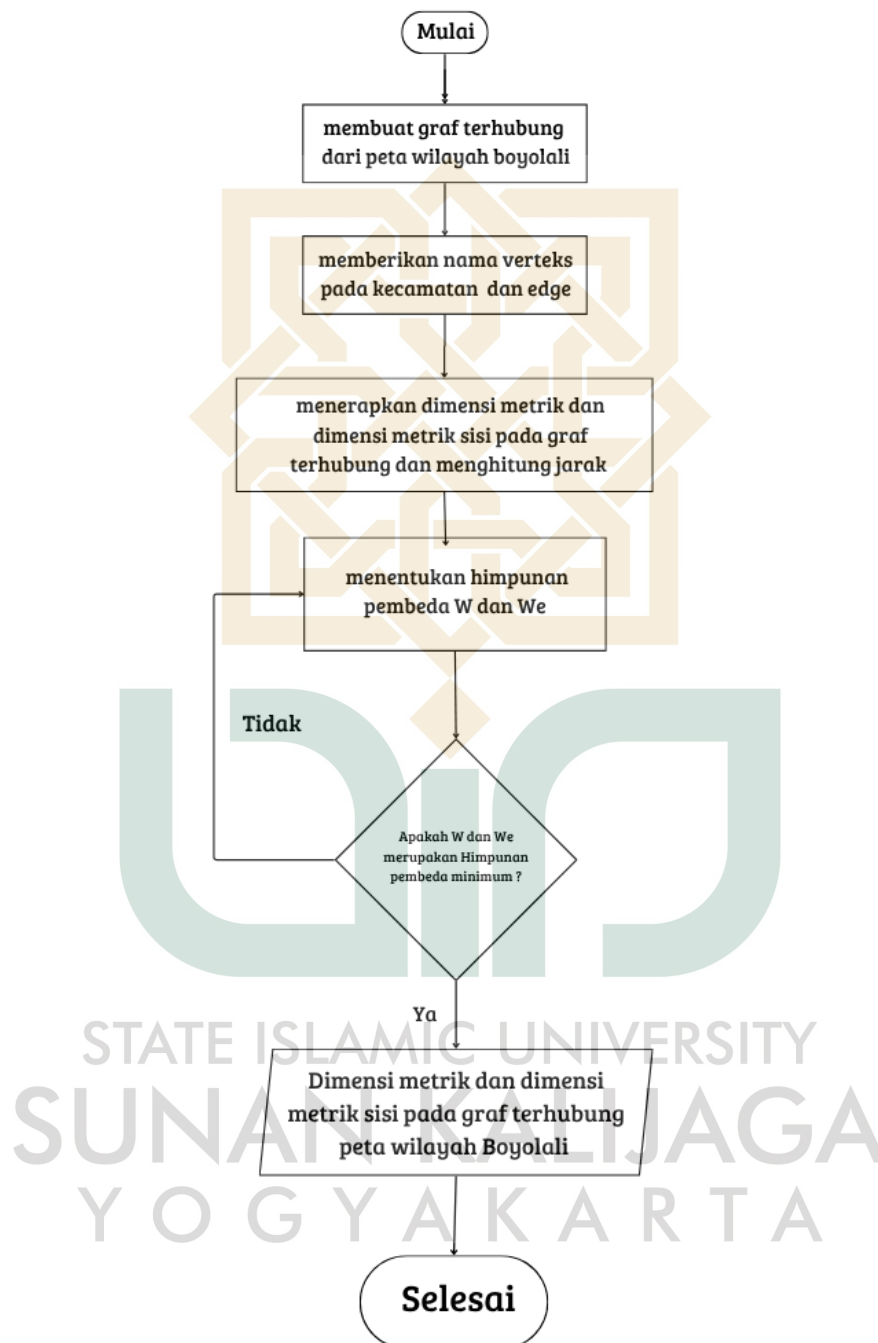
1. Membahas konsep dasar dari graf dan dimensi metrik.

2. Membahas konsep dasar dimensi metrik sisi pada graf theta seragam.
3. Membuat verteks sebanyak  $m$  disetiap lintasan pada graf theta seragam.
4. Menentukan penamaan setiap verteks pada graf theta.
5. Menghitung jarak sisi terhadap verteks pada graf theta seragam yang diperumum dengan banyaknya  $m$  verteks.
6. Menentukan himpunan pembeda pada graf semimum mungkin jika tidak bernilai minimum maka menentukan himpunan pembeda  $W_e$  hingga minimum.
7. Membuat rumus dimensi metrik sisi pada graf theta seragam.
8. Selesai



**Gambar 1.1 Flowchart Metode Penelitian**

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA



Gambar 1.2 Flowchart Metode Penelitian pada Penerapan



### 1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi lima bab, yaitu sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas tentang dasar-dasar dari graf dan terminologi graf, adjacent dan incident, beserta jenis-jenis graf
- BAB 3** : Bab ini membahas tentang dimensi metrik, dimensi metrik sisi, graf theta seragam, dan menentukan dimensi metrik sisi pada graf theta seragam.
- BAB 4** : Bab ini membahas pengaplikasian atau penerapan dari dimensi metrik dan dimensi metrik sisi untuk menentukan lokasi Pos Pemadam Kebakaran di wilayah Kabupaten Boyolali.
- BAB 5** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

## BAB V

### PENUTUP

Bab penutup ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

#### 5.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Dimensi metrik sisi adalah nilai kardinalitas himpunan pembeda minimum pada suatu graf, dimana pada konsep ini melibatkan jarak antara edge dengan himpunan pembeda.
2. Graf theta seragam merupakan gabungan dari graf lintasan yang memiliki titik ujung yang disebut kutub utara dan kutub selatan. Dalam penelitian ini diperoleh dimensi metrik sisi pada graf theta seragam sebagai berikut.

$$edim(\theta(n; m)) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } n = 3, 4. \\ 4 & \text{untuk } n = 5. \\ 5 & \text{untuk } n = 6 \end{cases}$$

3. Dimensi metrik dan dimensi metrik sisi ini dapat diaplikasikan dalam penempatan Pos Pemadam Kebakaran di Wilayah Boyolali. Konsep dimensi metrik digunakan untuk menentukan set lokasi optimal sehingga dapat memastikan cakupan area yang maksimal dengan jumlah pos, dimulai dengan membuat

graf terhubung dari setiap kecamatan, dilanjutkan dengan menghitung jarak antar verteks dan edge terhadap verteks. Kemudian menentukan himpunan pembeda  $W$ , diperoleh bahwa lokasi yang akan dibangun Pos Pemadam Kebakaran adalah Ampel, Nogosari, dan Kemusu. Selanjutnya menentukan himpunan pembeda  $W_e$ , diperoleh bahwa lokasi yang akan dibangun Pos Pemadam Kebakaran adalah Selo, Ampel, Musuk, Teras, Ngemplak, Klego, Kemusu, dan Juwangi.

## 5.2. Saran

Saran yang akan penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini masih memiliki keterbatasan dalam cakupan yang digunakan. Pembahasan dimensi metrik sisi pada graf theta seragam ini dibatasi  $n = 6$ . Oleh karena itu, disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat mengembangkan lebih lanjut mengenai graf yang diperoleh dari hasil operasi join, amalgamasi, kartesian, *strong product*, *tensor product*, serta kelas-kelas graf lainnya seperti, graf seri paralel, graf teratai, graf hamilton dan lain-lain.
2. Penulis berharap adanya pengembangan lebih lanjut mengenai aplikasi dimensi metrik di dalam kehidupan sehari-hari. Hasil dari Penelitian menunjukkan bahwa penentuan lokasi Pos Pemadam Kebakaran didasarkan pada konektivitas antar kecamatan di wilayah Boyolali. Oleh karena itu, diharapkan penelitian lanjut dapat menerapkan dengan menggunakan jarak sebenarnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Adawiyah, R., Dafik., R. Alfarisi., R. M. Prihandini., I. H. Agustin., M. Venkatachalam. 2020. *The Local Edge Metric Dimension of Graph*. Journal of Physics: Conference Series. 1543(1):012009.
- Azka, D. A., Eksi Palupi, D. J., dan Sutjijana, A. 2022. *Dimensi Metrik Lokal dari Hasil Perkalian Kuat Graf Bintang*. Jurnal Fourier
- B. Rajan, I. Rajasingh, P. Venugopal, *Metric Dimension of Uniform and Quasi-Uniform Theta Graphs*, J. Comput. Math Sci. 2 (1) (2011) 37–46.
- Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A. dan Oellermann, O. R. (2000). *Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of a Graph*. Discrete Applied Mathematics, 105, 99–113.
- Chartrand, G., Salehi, E. dan Zhang, P. 2000. *The Partition Dimension of Resolvability in Graphs*. Aequationes Mathematicae. 59: 45 – 54
- Diestel, R. (2005). *Graph Theory*. Springer-Verlag.
- Hasmawati. (2020). *Pengantar dan Jenis-Jenis Graf*. UPT Unhas Press
- Ilmayasinta, N. 2019. *Dimensi Metrik Pada Graf Buku Ganda*. Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika Vol. I No. 01 Februari 2019
- Kelenc, A., Tratnik, N. dan Yero, I. G. 2018. *Uniquely identifying the edges of a graph: The edge metric dimension*. Discrete Applied Mathematics, 251(1), 204-220.

- Khoiriah, S. dan Kusmayadi, T. A. 2018. *Dimensi Metrik Lokal Pada Graf Antiprisma dan Graf Sun*. Journal of Mathematics and Mathematics Education Vol.8, No.1, hal 9-15 Juli 2018.
- Manongga, D. dan Nataliani, Y. (2013). *Matematika Diskrit*. Jakarta: Prenadamedia Grup.
- Marsudi. 2016. *Teori Graf*. Malang: UB Press.
- Munandar, A. 2022. *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*. Sleman: Penerbit Deepublish (CV Budi Utama).
- Putra, R. W. dan Susanti, Y. 2018. *On Total Edge Irregularity Strength of Centralized Uniform Theta Graphs*. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics
- R. Adawiyah, Dafik, R. Alfarisi, R. M. Prihandini and I. H. Agustin(2018). Edge Metric Dimension on Some Families of Tree. Journal of Physics: Conference Series
- Rahmadi, D. dan Kusmayadi, T. A. 2024. *Dimensi Metrik pada Graf Barbel*. Prosiding Semnas Mat-PMat USD 2014.
- Rahmadi, D. dan Susanti, Y. 2024. *Dimensi K-Metrik pada Graf Parasut yang Diperumum*. Jurnal Diferensial Vol.6(2),2024, 179–187.
- Rinurwati dan Nabila, R. E. 2020. *Metric and edge-metric dimensions of bobble-neighbourhood-corona graphs*. Journal of Physics: Conference Series
- Rinurwati. Slamin and Suprajitno,H. 2017. *On Metric Dimension of Edge-Corona Graphs*. Far East Journal of Mathematical Sciences

- Sainstekno. 2024, 31 Desember. *Dimensi metrik: Pengertian, konsep, dan aplikasinya*. <https://sainstekno.net/2024/12/31/dimensi-metrik-pengertian-konsep-dan-aplikasinya/>
- Septiana, E. R. dan Rahadjeng, B. (2012). *Dimensi metrik pada graf lintasan, graf komplit, graf sikel, graf bintang dan graf bipartit komplit*.
- Shofi, A. M. A. (2021). Analisis Pembuktian Lemma Jabat Tangan Dalam Graf Dengan Prinsip Induksi Matematika [Makalah]. Program Studi Teknik Informatika, Sekolah Teknik Elektro dan Informatika, Institut Teknologi Bandung. [https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2021-2022/Makalah2021/Makalah-Matdis-2021%20\(162\).pdf](https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2021-2022/Makalah2021/Makalah-Matdis-2021%20(162).pdf)
- Siang, J. J. 2009. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. ED.IV Yogyakarta: Penerbit (Andhi) hal.227.
- Singh, P., Sharma, S., Sharma, S. K., dan Bhat, V. K. (2021). *Metric dimension and edge metric dimension of windmill graphs*. Aims Mathematics. 6(9), 9138-9153
- Suryadi, D. dan Priatna, N. 2008. *Pengantar Teori Graf*. Jakarta : Universitas Terbuka.
- Uspace. 2024. *Peta Kabupaten Boyolali*. Retrieved from <https://www.uspace.id/43312/peta-kabupaten-boyolali-provinsi-jawa-tengah.html>
- Welyyanti,D. Arsyad,A. dan Yulianti,L. 2023. *Dimensi Metrik Amalgamasi Graf Theta*. Journal of Mathematics and Its Applications



Wilson, J. Robin and John J. Watskin. 1990. *Graphs An Introductory Approach*.

New York : University Course Graphs, Network, and Design.

