

SKRIPSI

BEBERAPA SIFAT DERIVASI RING PRIMA



DIAH AJENG NOVA ANANDA

21106010030

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2025

BEBERAPA SIFAT DERIVASI RING PRIMA

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



diajukan oleh

DIAH AJENG NOVA ANANDA

21106010030

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2025



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu 'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Diah Ajeng Nova Ananda

NIM : 21106010030

Judul Skripsi : Beberapa Sifat Derivasi Ring Prima

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu 'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 26 Mei 2025

Pembimbing

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati M.Si.

NIP. 19660731 200003 2 001



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1171/Un.02/DST/PP.00.9/06/2025

Tugas Akhir dengan judul : Beberapa Sifat Derivasi Ring Prima

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : DIAH AJENG NOVA ANANDA
Nomor Induk Mahasiswa : 21106010030
Telah diujikan pada : Selasa, 10 Juni 2025
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 68513bc269dc7



Penguji I

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 684f7a91966d1



Penguji II

Aulia Khifah Futhona, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 684f913317579



Yogyakarta, 10 Juni 2025
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 68513bc2652f6

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Diah Ajeng Nova Ananda
NIM : 21106010030
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 26 Mei 2025

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA



Diah Ajeng Nova Ananda

HALAMAN PERSEMBAHAN



Teruntuk papi, selamat ulang tahun ke 72 serta
almamater, UIN Sunan Kalijaga.

HALAMAN MOTTO



"Happiness is your birthright. set yourself free, and bokura no sekai wo hiroku"

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Beberapa sifat derivasi ring prima". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta sekaligus selaku pembimbing skripsi yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran serta telah banyak memberikan motivasi, masukan, dan arahan yang sangat bermanfaat dalam penyusunan skripsi penulis.
2. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika sekaligus selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan..
3. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.
4. *One and only my treasured family*, Papi, Mami, dan *My Bro*.

5. Keluarga berharga yang saya temukan dalam proses perkuliahan My Kyu, Pin Pin, Emak, Jyee dan Rismaa (*Kujan Family*).
6. Dek lisa dan keluarga besar, yang senantiasa menjadi rumah kedua selama proses perkuliahan berlangsung.
7. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 30 Mei 2025

Penulis

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMBANG	xiii
INTISARI	xiv
ABSTRACT	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	5
1.3. Rumusan Masalah	5
1.4. Tujuan Penelitian	6
1.5. Manfaat Penelitian	6
1.6. Tinjauan Pustaka	7
1.7. Metode Penelitian	8
1.8. Sistematika Penulisan	9
II DASAR TEORI	11

2.1. Teori Ring	11
2.1.1. Ring dan Subring	11
2.1.2. Ideal, Ideal Prima dan Ring Prima	27
2.1.3. Komutator, <i>Center</i> atau pusat, dan Karakteristik pada Ring .	39
III BEBERAPA SIFAT DERIVASI RING PRIMA	45
3.1. Derivasi pada Ring Prima	45
3.2. Teorema Posner Pertama dan Teorema Posner Kedua	59
IV PENUTUP	106
4.1. Kesimpulan	106
4.2. Saran	108
DAFTAR PUSTAKA	109
Curriculum Vitae	112



DAFTAR TABEL

2.1	Tabel Cayley $(I, +)$	28
2.2	Tabel Cayley $r \bullet a$	29



DAFTAR GAMBAR

1.1	Skema Metode Penelitian	9
-----	-----------------------------------	---



DAFTAR LAMBANG

$x \in A$:	x anggota A
$x \notin A$:	x bukan anggota A
\bullet	:	Operasi perkalian
$A \subseteq X$:	A himpunan bagian (<i>subset</i>) atau sama dengan X
$A \subset X$:	A himpunan bagian (<i>subset</i>) X
$a \geq b$:	a lebih besar atau sama dengan b
$Z(R)$:	<i>Center</i> atau pusat suatu ring R
\mathbb{N}	:	Himpunan semua bilangan asli
\mathbb{Z}	:	Himpunan semua bilangan bulat
\mathbb{R}	:	Himpunan semua bilangan real
\blacksquare	:	Akhir suatu bukti
$p \Rightarrow q$:	Jika p maka q
\Leftrightarrow	:	Jika dan hanya jika

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

INTISARI

BEBERAPA SIFAT DERIVASI RING PRIMA

Oleh

Diah Ajeng Nova Ananda

21106010030

Konsep derivasi pada ring berawal dari keinginan para matematikawan untuk mengabstraksikan dan memperumum ide derivasi pada kalkulus ke dalam ruang lingkup aljabar. Gottfried Wilhelm Leibniz mengemukakan gagasan derivasi serta memperkenalkan "notasi Leibniz" yaitu simbol d untuk menyatakan proses derivasi dan suatu aturan derivasi yaitu "aturan Leibniz". Derivasi pada kalkulus didefinisikan pada ring bilangan *real* yang merupakan suatu lapangan. Setiap lapangan adalah ring prima, namun tidak sebaliknya. Abstraksi dan perumuman derivasi ke dalam ruang lingkup aljabar didefinisikan pada ring secara umum, lebih khusus pada ring prima. Derivasi ring merupakan suatu pemetaan pada ring ke dirinya sendiri yang memenuhi aturan Leibniz. Keprimaan dan karakteristik suatu ring adalah prasyarat utama dalam penelitian ini. Fokus penelitian adalah teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua. Teorema Posner pertama menyatakan bahwa sebarang ring prima dengan karakteristik bukan 2 serta dilengkapi oleh dua derivasi, sedemikian sehingga operasi komposisi dua derivasi tersebut juga merupakan derivasi, berakibat satu diantaranya merupakan derivasi nol. Teorema Posner kedua menyatakan bahwa sebarang ring prima dengan karakteristik bukan 2 serta dilengkapi oleh suatu derivasi d , dengan setiap a dalam ring prima, $ad(a) - d(a)a$ merupakan elemen *center* atau pusat suatu ring prima, jika derivasi tersebut tak nol maka ring bersifat komutatif. Terdapat beberapa contoh kontra untuk memperkuat bahwa prasyarat utama terhadap teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua adalah ring prima dengan karakteristik bukan 2. Sebagai penguat terhadap teorema Posner pertama, diberi suatu ring prima dan ring bukan prima dengan karakteristik 2. Sebagai penguat terhadap teorema Posner kedua, diberi suatu ring bukan prima dengan karakteristik bukan 2 dan tidak komutatif.

Kata kunci : Derivasi ring, Derivasi ring prima, Teorema Posner pertama, Teorema Posner kedua.

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF DERIVATION ON PRIME RINGS

By

Diah Ajeng Nova Ananda

21106010030

The concept of derivation in ring theory originates from mathematicians' desire to abstract and generalize the idea of differentiation in calculus into the realm of algebra. Gottfried Wilhelm Leibniz introduced the concept of derivation and the symbol d to denote the process of differentiation, known as "Leibniz notation", along with a rule of differentiation in calculus referred to as the "Leibniz rule". In calculus, derivation is defined on the field of real numbers, which is a particular kind of ring known as a field. Every field is a prime ring, but the converse does not necessarily hold. The abstraction and generalization of derivation into algebraic structures are defined on rings in general, more specifically on prime rings. A ring derivation is a mapping from the ring to itself that satisfies the Leibniz rule. The primeness and characteristic of a ring are key prerequisites in this study. This research focuses on the First and Second Posner's Theorems. The First Posner's Theorem states that in any prime ring of characteristic not equal 2, equipped with two derivations such that the composition of the two derivations is also a derivation, it follows that one of the derivations must be zero. The Second Posner's Theorem asserts that in any prime ring of characteristic not equal 2, equipped with a nonzero derivation, if for every element a in the ring, the expression $ad(a) - (a)a$ lies in the center of the ring, then the ring is commutative. Several counterexamples are provided to reinforce the necessity of the prime ring condition and the requirement that the characteristic not be 2, as stipulated in both Posner's Theorems. To support the First Posner's Theorem, examples are given involving a prime ring and a non-prime ring of characteristic 2. To support the Second Posner's Theorem, an example is provided of a non-prime, noncommutative ring with characteristic not equal to 2.

Keyword : Derivation of ring, Derivation of prime ring, First Posner theorem, Second Posner theorem.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Allah SWT menciptakan manusia sebagai salah satu makhluk hidup yang dilimpahkan kesempurnaan dalam berbagai aspek, terlebih khusus berupa akal sehat. Akal sehat yang Allah SWT telah berikan kepada umat manusia sudah semestinya dipergunakan sebaik mungkin. Hal tersebut sejalan dengan salah satu hadist yang berbunyi:

خَيْرُ النَّاسِ أَنْفَعُهُمْ لِلنَّاسِ

Artinya: "Sebaik baiknya manusia adalah yang paling bermanfaat bagi orang lain"
(HR. Ahmad, ath-Thabrani, ad-Daruqutni Hadits ini dihasankan oleh al-Albani di dalam *Shahihul Jami'* no:3289) (bin Hanbal et al. (1995))

Rasa syukur atas akal sehat yang telah Allah SWT berikan, dapat ditunjukkan melalui kegiatan menuntut ilmu. Ilmu yang dapat dipelajari oleh umat manusia sangatlah beragam, salah satunya adalah matematika. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang berhubungan erat dengan logika dan perhitungan sehingga menjadi dasar dari semua ilmu.

Topik pembelajaran ilmu matematika sangatlah beragam, namun dalam jenjang dasar sering ditemui konsep mengenai bilangan. Konsep bilangan tersebut, menjadi dasar pemahaman yang penting untuk dipahami karena penerapan konsep bilangan akan selalu menyertai pembahasan pada ragam topik ilmu matematika.

Konsep bilangan tersebut, juga terdapat pada salah satu firman Allah SWT di surat *Al-Fajr* Ayat 3:



Artinya: "Demi yang genap dan yang ganjil."

(Kementerian Agama Republik Indonesia (2019))

Matematika sebagai dasar dari berbagai ilmu dapat melahirkan cabang ilmu lain salah satunya adalah aljabar abstrak. Aljabar abstrak membahas suatu struktur tertentu pada ilmu matematika diantaranya grup, ring, ruang vektor, modul, dan aljabar itu sendiri. Ring menjadi salah satu struktur dari pembahasan aljabar abstrak yang merupakan alat bantu pemahaman mengenai topik penelitian ini.

Penelitian ini terinspirasi oleh Ibraheem (2018) mengenai komutatifitas terhadap *Near-ring* prima. Ibraheem (2018) menyelidiki komutatifitas *Near-ring* terhadap turunan σ terbalik atau *reverse σ derivation* yang memenuhi beberapa sifat ketika *Near-ring* tersebut merupakan *Near-ring* prima. Setiap ring merupakan *Near-ring* namun tidak sebaliknya. Hal ini karena *Near-ring* merupakan salah satu bentuk generalisasi dari ring. Berbeda dengan Ibraheem (2018), penelitian ini secara khusus berfokus pada sembarang ring, lebih khusus ring prima serta membahas beberapa sifat derivasi pada ring prima.

Konsep derivasi pada ring berawal dari keinginan para matematikawan untuk mengabstraksikan dan memperumum ide derivasi pada kalkulus ke dalam ruang lingkup aljabar. Gottfried Wilhelm Leibniz mengemukakan gagasan derivasi serta memperkenalkan simbol d untuk menyatakan proses derivasi yang juga dikenal sebagai "notasi Leibniz". Leibniz menggunakan lambang $\frac{dy}{dx}$ untuk menyatakan

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dengan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, jika $y = f(x)$ maka $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ (C.J., 1950).

Notasi Leibniz bukan satu satunya gagasan yang dikemukakan oleh Gottfried Wilhelm Leibniz dalam pembahasan derivasi pada kalkulus. Terdapat suatu aturan perkalian derivasi pada kalkulus yang juga dikenal sebagai "aturan Leibniz" yaitu $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, dalam notasi Leibniz persamaan tersebut dapat juga dinyatakan sebagai $\frac{d}{dx}[fg] = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}$ (Shakir Ali, 2024).

Konsep aturan Leibniz dalam derivasi pada kalkulus tersebut tetap dipertahankan dan hanya mengalami perubahan notasi dalam konsep derivasi pada ruang lingkup aljabar. Aturan Leibniz pada ruang lingkup aljabar didefinisikan dengan $d(xy) = xd(y) + d(x)y$ untuk setiap x, y elemen pada ring maupun *Near-ring*. Motivasi penggunaan konsep derivasi pada aljabar salah satunya adalah sebagai alat bantu dalam menyelidiki komutatifitas suatu ring maupun *Near-ring* sebagaimana pada Ibraheem (2018). Penelitian dalam ruang lingkup aljabar dengan menerapkan konsep derivasi diawali oleh Jacobson pada tahun 1945 (Shakir Ali, 2024).

Derivasi pada kalkulus didefinisikan pada ring bilangan real yang merupakan suatu lapangan. Seperti yang diketahui, lapangan adalah ring komutatif dengan elemen satuan serta setiap elemen tak nol nya memiliki invers dan bukan merupakan pembagi nol (pembagi nol non trivial). Hal tersebut berakibat setiap lapangan adalah ring prima, namun tidak sebaliknya. Abstraksi dan perumuman derivasi ke dalam ruang lingkup aljabar didefinisikan pada ring secara umum dan lebih khusus pada penelitian ini adalah ring prima. Motivasi pemilihan ring prima pada penelitian ini adalah karena ring prima merupakan generalisasi dari lapangan dan juga termotivasi dari Ibraheem (2018) mengenai penelitiannya dalam lingkup *Near-ring* prima.

Shakir Ali (2024) yang meneliti ragam jenis derivasi pada sembarang ring

salah satunya ring prima, menjadi referensi utama dalam penelitian ini. Selain perbedaan lingkup *Near-ring* atau ring pada pembahasan Ibraheem (2018) dan Shakir Ali (2024), derivasi yang digunakan pun berbeda. Derivasi dalam penelitian ini maupun pada Shakir Ali (2024) adalah pendefinisian derivasi secara umum, berbeda dengan Ibraheem (2018) yang meneliti dalam ruang lingkup derivasi terbalik atau *reverse derivation*.

Shakir Ali (2024) mendefinisikan derivasi ring sebagai suatu pemetaan ring ke dirinya sendiri yang memenuhi aturan Leibniz. Untuk dapat menentukan suatu pemetaan yang memenuhi aturan Leibniz, dapat digunakan pemahaman mengenai konsep derivasi dalam atau *inner derivation* sebagai alat bantu. Konsep derivasi dalam atau *inner derivation* merupakan salah satu konsep yang menerapkan komutator sebagai definisi operasinya.

Ring prima dengan karakteristik bukan 2 merupakan syarat penting dalam proses pembuktian beberapa sifat derivasi ring. Ring prima dengan karakteristik bukan 2 yang disyaratkan mengakibatkan ring tersebut bebas torsi dua, hal ini juga menjadi penting dalam proses pembuktian beberapa sifat derivasi ring. Keterkaitan syarat tersebut dan alasan mengapa berlaku menjadi salah satu pembahasan penting dalam penelitian ini.

Beberapa sifat derivasi ring prima yang menjadi fokus penelitian adalah teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua. Shakir Ali (2024) telah membahas kedua teorema Posner tersebut dalam penelitiannya, namun pada penelitian kali ini dibahas lebih detail proses pembuktian kedua teorema Posner tersebut. Adapun pembeda antara penelitian ini dengan Shakir Ali (2024) selain penjelasan lebih rinci pada proses pembuktian, dibahas juga keterkaitan setiap konsep yang menjadi prasyarat utama pada teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua serta di-

berikan beberapa contoh kontra, penguat argumentasi pentingnya konsep ring prima dengan karakteristik bukan 2 sebagai prasyarat utama pada teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua.

1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada pembahasan penelitian kali ini adalah beberapa sifat derivasi ring prima diantaranya teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua. Lebih lanjut, akan dibahas mengenai keterkaitan setiap konsep yang tertera pada teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua terhadap proses pembuktian teorema tersebut.

Pembahasan akan diawali dari konsep dasar derivasi ring secara umum kemudian dilanjutkan dengan pemahaman ragam konsep yang menjadi alat bantu dalam proses pembuktian, yaitu *inner derivation* atau derivasi dalam serta ring bebas torsi- n dan berlanjut pada pembahasan beberapa sifat derivasi ring prima yaitu teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua beserta contoh yang memperkuat terpenuhinya teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua hanya pada ring prima dengan karakter bukan dua.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep dasar tentang derivasi ring secara umum?
2. Bagaimana konsep dasar tentang beberapa sifat derivasi ring prima meliputi teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua?
3. Bagaimana keterkaitan setiap konsep yang tertera pada teorema Posner perta-

ma dan teorema Posner kedua terhadap proses pembuktian teorema tersebut?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari tentang konsep dasar derivasi ring secara umum.
2. Mempelajari tentang beberapa sifat derivasi ring prima meliputi teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua?
3. Mempelajari tentang keterkaitan setiap konsep yang tertera pada teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua terhadap proses pembuktian teorema tersebut.
4. Mempelajari tentang beberapa contoh yang memperkuat terpenuhinya teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua hanya pada ring prima.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Manfaat bagi peneliti adalah dapat menjadi sarana untuk menambah wawasan pada bidang aljabar dan menerapkan hasil belajarnya.
2. Manfaat bagi pembaca adalah dapat menambah wawasan dan pengetahuan mengenai derivasi ring prima, terlebih khusus beberapa sifat atau teorema diantaranya teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua.
3. Manfaat bagi lembaga adalah dapat menambah rujukan penelitian bidang aljabar, terutama mengenai derivasi ring prima beserta sifatnya.

1.6. Tinjauan Pustaka

Penelitian ini terinspirasi oleh karya Ibraheem (2018) yang membahas komutatifitas terhadap *Near-ring* prima. Ibraheem (2018) menyelidiki komutatifitas *Near-ring* terhadap turunan σ terbalik atau *reverse σ derivation* yang memenuhi beberapa sifat ketika *Near-ring* tersebut merupakan *Near-ring* prima. *Near-ring* merupakan generalisasi atas ring, dimana setiap ring merupakan *Near-ring* namun tidak sebaliknya. Berbeda dengan Ibraheem (2018), penelitian ini membahas beberapa sifat derivasi pada ring prima.

Konsep derivasi pada ring berawal dari keinginan para matematikawan untuk mengabstraksikan dan memperumum ide derivasi pada kalkulus ke dalam ruang lingkup aljabar. Shakir Ali (2024) yang meneliti ragam jenis derivasi pada sembarang ring salah satunya ring prima, menjadi referensi utama dalam penelitian ini. Selain perbedaan lingkup *Near-ring* atau ring pada pembahasan Ibraheem (2018) dan Shakir Ali (2024), derivasi yang digunakan pun berbeda. Derivasi dalam penelitian ini maupun pada Shakir Ali (2024) adalah pendefinisian derivasi secara umum, berbeda dengan Ibraheem (2018) yang meneliti dalam ruang lingkup derivasi terbalik atau *reverse derivation*.

Penelitian dalam ruang lingkup aljabar mengenai penerapan konsep derivasi pada ring diawali oleh Jacobson pada tahun 1945. Herstein, pada tahun 1951 menjadi salah satu dari sekian banyak matematikawan yang mulai tertarik dan melanjutkan penelitian Jacobson serta memfokuskan penelitian pada konsep *center* atau pusat suatu ring (Shakir Ali, 2024).

Posner (1957) membahas mengenai dua teorema penting yang dikenal sebagai teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua. Kedua teorema tersebut merupakan pembahasan penting pada penelitian ini. Shakir Ali & Muthana (2016)

menerapkan kondisi semiprima sebagai syarat penting dalam proses pembuktian beberapa sifat derivasi ring dan meneliti apakah kedua teorema Posner dan teorema lain yang berlaku pada kondisi ring prima juga berlaku pada kondisi semiprima. Shakir Ali (2024) menyempurnakan penelitiannya dengan mengulas keseluruhan penelitian mengenai derivasi pada ring dari era Jacobson hingga yang paling terbaru serta memberikan keterangan atas peran setiap konsep yang dinyatakan dalam teorema ataupun sifat pada pembahasan derivasi ring.

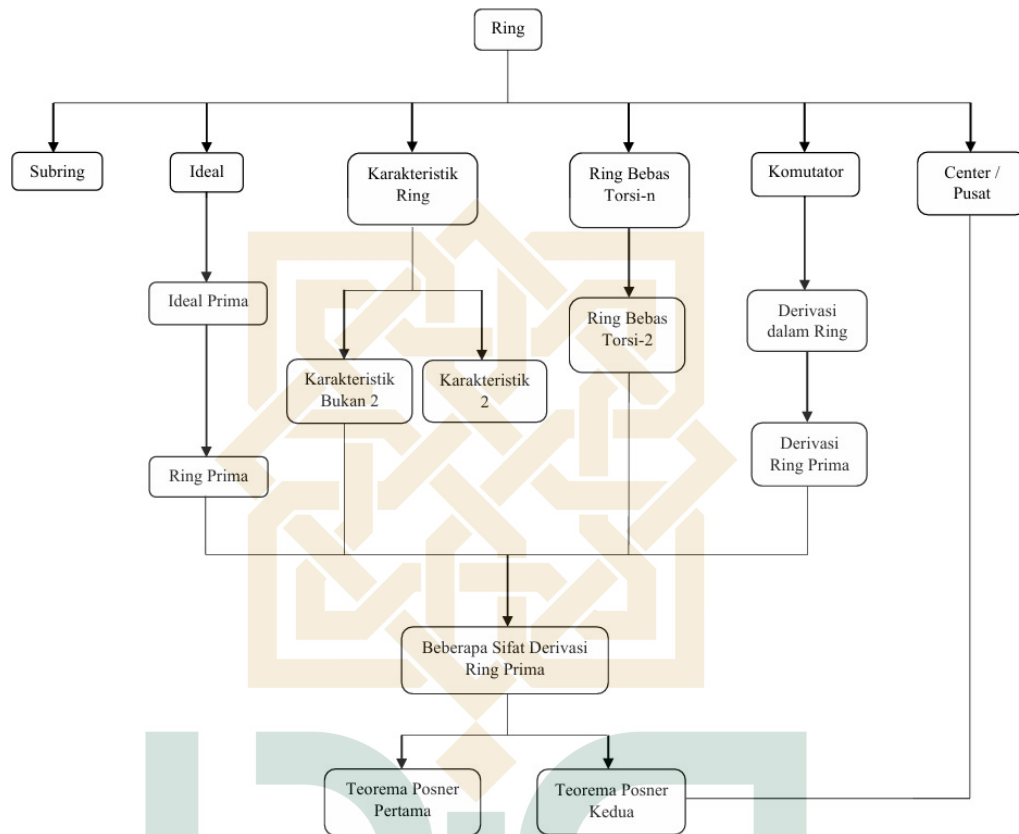
Shakir Ali (2024) merupakan referensi utama dalam penelitian ini, namun hanya memfokuskan pembahasan pada derivasi ring prima dan teorema Posner pertama serta teorema Posner kedua. Perbedaan penelitian ini dengan Shakir Ali (2024) terletak pada pembahasan terdapatnya beberapa contoh kontra yang memperkuat terpenuhinya teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua hanya pada ring prima dengan karakter bukan dua.

1.7. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam proses penelitian berikut yaitu metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal terkait topik penelitian yaitu; konsep dasar derivasi ring, pengaplikasian derivasi ring, terkhusus ring prima dalam penerapan teorema atau sifat.

Penelitian berikut diawali dengan konsep teori ring. Pembahasan teori ring yang disertakan dalam penelitian berikut meliputi definisi ring, subring, ideal prima, ring prima, komutator, *center* atau pusat, karakteristik ring, ring bebas torsi- n . Selain itu dibahas derivasi ring secara umum, derivasi dalam pada ring, proses pembuktian teorema posner pertama dan teorema Posner kedua serta beberapa contoh yang memperkuat terpenuhinya teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua

hanya pada ring prima dengan karakter bukan dua.



Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab, yaitu sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas mengenai teori dan konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini. Teori yang digunakan adalah teori grup dan teori ring serta konsep mengenai komutator, *center* atau pusat dan karakteristik pada ring.
- BAB 3** : Bab ini membahas mengenai penelitian yang dilakukan, yakni mengenai derivasi ring prima dan proses pembuktian teorema posner pertama dan teorema posner kedua.
- BAB 4** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Konsep derivasi pada ring berawal dari keinginan para matematikawan untuk mengabstraksikan dan memperumum ide derivasi pada kalkulus ke dalam ruang lingkup aljabar. Shakir Ali (2024) yang meneliti ragam jenis derivasi pada sembarang ring salah satunya ring prima, menjadi referensi utama dalam penelitian ini.

Shakir Ali (2024) mendefinisikan derivasi ring sebagai suatu pemetaan ring ke dirinya sendiri yang memenuhi aturan Leibniz. Keprimaan dan karakteristik suatu ring, merupakan syarat penting dalam proses pembuktian beberapa sifat derivasi. Penelitian beberapa sifat derivasi ring prima ini dinyatakan dalam dua teorema utama yaitu teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua.

Konsep derivasi dalam atau *inner derivation* merupakan alat bantu untuk dapat menentukan suatu pemetaan yang memenuhi aturan Leibniz. Konsep derivasi dalam atau *inner derivation* merupakan salah satu konsep yang menerapkan komutator sebagai definisi operasinya. *Inner derivation* atau derivasi dalam dapat digunakan untuk mencari suatu derivasi pada ring secara umum, baik ring prima maupun tidak.

Ring prima dengan karakteristik bukan 2 merupakan syarat penting dalam proses pembuktian beberapa sifat derivasi ring yaitu pada teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua. Ring prima dengan karakteristik bukan 2 yang disyaratkan mengakibatkan ring tersebut bebas torsi dua, hal ini telah dibahas dalam pro-

ses pembuktian beberapa sifat derivasi ring. Penelitian mengenai teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua ini juga terdapat pada Shakir Ali (2024), namun tidak disertakan contoh yang memperkuat teorema tersebut. Hal tersebut merupakan salah satu inti dari penelitian ini yaitu memberikan beberapa contoh yang memperkuat terpenuhinya teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua hanya pada ring prima dengan karakter bukan dua.

Fokus penelitian adalah teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua. Teorema Posner pertama yaitu sembarang ring prima dengan karakteristik bukan 2 serta dilengkapi oleh dua derivasi, sedemikian sehingga operasi komposisi permetaan dua derivasi tersebut juga merupakan derivasi, berakibat satu diantara dua derivasi tersebut merupakan nol. Teorema Posner kedua yaitu pada sembarang ring prima dengan karakteristik bukan 2 serta dilengkapi oleh suatu derivasi, dengan setiap a dalam ring prima, $ad(a) - d(a)a$ merupakan elemen *center* atau pusat suatu ring prima, jika derivasi tersebut tak nol maka ring bersifat komutatif.

Terdapat beberapa contoh kontra untuk memperkuat bahwa prasyarat utama terhadap teorema Posner pertama dan teorema Posner kedua adalah ring prima dengan karakteristik bukan 2. Sebagai penguat terhadap teorema Posner pertama, diberi suatu ring prima dan ring bukan prima dengan karakteristik 2 serta ring bukan prima dengan karakteristik bukan dua, ditemukan dua derivasi tak nol yang komposisinya merupakan derivasi. Sebagai penguat terhadap teorema Posner kedua, diberi suatu ring bukan prima dengan karakter bukan 2 dan tidak komutatif, ditemukan derivasi tak nol yang untuk setiap a dalam ring, $ad(a) - d(a)a$ elemen *center* atau pusat ring tersebut.

Syarat ring prima pada teorema posner pertama dan teorema posner kedua digunakan untuk menjamin tidak adanya pembagi nol non trivial pada suatu ring

atau dengan kata lain tidak terdapat perkalian dua elemen tak nol pada suatu ring yang menghasilkan nol. Hal ini akan membantu untuk membatasi kemungkinan hasil yang diperoleh pada operasi derivasi pada ring. Kemungkinan terdapatnya pembagi nol non trivial, akan membuat terpenuhinya definisi derivasi pada ring semakin sulit, dan memunculkan gagal terpenuhinya kesimpulan yang ingin ditunjukkan yaitu komposisi kedua derivasi merupakan derivasi dan ring R komutatif.

Syarat karakteristik bukan 2 pada teorema posner pertama dan teorema posner kedua memiliki makna bilangan bulat terkecil n dengan $n \neq 2$ sedemikian sehingga $2a = a + a \neq 0$ untuk setiap $a \in R$. Hal ini menunjukkan bahwa penjumlahan akan beroperasi secara standar yaitu $1 + 1 \neq 0$ berakibat operasi komposisi derivasi dapat didefinisikan secara umum, karena jika tidak disyaratkan maka akan terdapat suatu ring prima dengan karakteristik 2 yang akan mengacaukan operasi komposisi derivasi dengan adanya $1 + 1 = 0$. Selain itu pada ring dengan karakteristik bukan 2 juga menjamin tidak berlakunya $a = -a$ untuk setiap $a \in R$ sebagaimana yang berlaku pada ring dengan karakteristik 2.

4.2. Saran

Penelitian berikut telah membahas mengenai beberapa sifat derivasi ring prima yang dinyatakan dalam dua teorema utama yaitu teorema posner pertama dan teorema posner kedua. Kedua teorema tersebut merupakan salah satu teorema dasar dalam topik penelitian mengenai derivasi ring, sedemikian sehingga masih banyak teorema lain yang dapat dipelajari dan dikembangkan lebih lanjut dalam penelitian berikutnya. Selain ragam jenis teorema dalam derivasi ring, masih terdapat banyak derivasi pada ring secara umum lainnya seperti derivasi ring semiprima.

Derivasi pada penelitian ini merupakan salah satu pendefinisian derivasi pa-

ling sederhana. Terdapat pendefinisian derivasi lain yang menarik untuk diteliti, seperti derivasi umum, derivasi terbalik, dan derivasi umum terbalik pada ring. Generalisasi konsep derivasi juga sudah mencakup hingga lingkup derivasi *near-ring*. Beberapa referensi lanjutan sebagaimana yang telah disarankan di atas, salah satunya adalah sebagai berikut: Ibraheem (2018), Mohammad Ashraf (2014), Bharat Bhusan (2020), Rehman (2002), Shang (2012) dan masih banyak lainnya.



DAFTAR PUSTAKA

- Aboubakr, A. Gonzalez, S. (2015). Generalized reverse derivations on semiprime rings. *Siberian Mathematical Journal.*, 56:199–205.
- Bell, H. E. & Rehman, N.-U. (2007). Generalized derivations with commutativity and anti-commutativity conditions. *Math. J. Okayama Univ.*, 49:139–147.
- Bharat Bhusan, Gurninder Sandhu, D. K. (2020). A note on reverse derivations in rings. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 9:4383–4388.
- bin Hanbal, A., ath Thabrani, & ad Daruqutni (1995). Shahih al-jami'. Hadis ini dihasankan oleh al-Albani, No. 3289.
- C.J., C. (1950). The generalized leibniz formula. *The American Mathematical Monthly*, 57:459–466, DOI: <https://doi.org/10.2307/2308298>.
- Huang, S. (2012). On generalized derivations of prime and semiprime rings. *Taiwanese Journal Of Mathematics*, 16:771–776.
- Ibraheem, A. (2018). The commutativity of prime near rings. *International Journal of Research - Granthaalayah*, 6:116–123, DOI: 10.5281/zenodo.1199133.
- Joseph, G. (2010). *Contemporary Abstract Algebra*. Brooks/Cole Cengage learning.
- Kementerian Agama Republik Indonesia (2019). *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an.

- Lanski, C. (1999). Differential identities, lie ideal and posner's theorems. *Pacific Journal Of Mathematics*, 134.
- Malik, Mordeson, S. (2007). *Introduction to Abstract Algebra*. Creighton University.
- Mohammad Ashraf, Abdelkarim Boua, A. R. (2006). On derivation in rings and their applications. *The Aligarh Bull. of Maths.*, 25.
- Mohammad Ashraf, Abdelkarim Boua, A. R. (2014). On derivations and commutativity in prime near-rings. *Journal of Taibah University for Science*, 8:301–306.
- Posner, E. C. (1957). Derivations in prime rings. *American Mathematical Society*, 8.
- Rehman, N. (2002). On comutativity of rings with generalized derivations. *Math. J. Okayama Univ.*, 44:43–49.
- Setiawan, A. (2021). *Dasar Dasar Aljabar Modern: Teori Grup dan Teori Ring*. Tisara Grafika.
- Shakir Ali, Mohammad Salahuddin Khan, A. N. K. & Muthana, N. M. (2016). On rings and algebras with derivations. *Journal of Algebra and Its Applications*, 15.
- Shakir Ali, Naira Noor Rafiquee, V. V. (2024). Certain types of derivations in rings: A survey. *J. Indones. Math. Soc.*, 30:256–306.
- Shang, Y. (2012). A note on the commutativity of prime near-rings.
- Thomas Judsan, B. R. (2022). *Abstract Algebra : Theory and Application*. abstract.pugetsound.edu.