MODEL PENYEBARAN PENYAKIT POLIO
DENGAN PENGARUH VAKSINASI

SKRIPSI

Untuk memenuhi sebagian persyaratan guna
Memperoleh derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

Diajukan oleh
Rr Laila Ma'rifatun
08610039

Kepada
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA
2013

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi

Lamp : -

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka saya selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Rr Laila Ma'rifatun

NIM : 08610039

Judul Skripsi : Model Penyebaran Penyakit Polio dengan Pengaruh Vaksinasi

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang Matematika.

Dengan ini saya mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya saya ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. Wb

Yogyakarta, 28 Desember 2012

Pembimbing I

Sugiyanto, S.T, M.Si
NIP. 19800505 200801 1 028

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/408/2013

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Model Penyebaran Penyakit Polio dengan Pengaruh Vaksinasi

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :
Nama : Rr Laila Ma'rifatun
NIM : 08610039
Telah dimunaqasyahkan pada : 28 Januari 2013
Nilai Munaqasyah : A/B
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Sugiyanto, M.Si
NIP. 19800505 200801 1 028

Penguji I

Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
NIP.19800402 200501 1 003

Penguji II

Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc

Yogyakarta, 08 Februari 2013
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
YOGYAKARTA
UIN SUNAN KALIJAGA

Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D
NIP. 19580919 198603 1 002

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Rr Laila Ma'rifatun
NIM	: 08610039
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri dan sepanjang pengetahuan penulis tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis orang lain, dan atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian Tugas Akhir di Perguruan Tinggi lain, kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 28 Desember 2012

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL
PAJAK MEMBANGUN BANGSA
TGL. 20
8419DABF236512849
ENAM RIBU RUPIAH
6000 DJP

Rr Laila Ma'rifatun

NIM. 08610039

HALAMAN PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada
ibuku Rr Nur Widayati dan ayahku M. Harwanto,
beserta kakak-kakakku

Teman-temanku semua yang selalu memberikan motivasi
dan kalian penyemangat hidupku

Guru-guruku yang telah memberikan bekal dalam hidupku
baik dunia maupun akherat.

HALAMAN MOTTO

"... Allah akan menggikan orang-orang yang beriman diantaramu
dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat.
Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan"
(QS Al Mujadilah: 11)

"Barang siapa yang menginginkan dunia hendaklah dengan ilmu,
barang siapa menginginkan akhirat hendaklah dengan ilmu,
dan barang siapa yang menginginkan keduanya maka hendaklah dengan ilmu".
(Al Hadist)

"Rumput yang paling kuat tumbunhnya terdapat di atas tanah yang paling keras."
(Galileo Galilei)

"Kesulitan apapun tak tahan terhadap keuletan dan ketekunan.
Tanpa keuletan, orang yang paling pintar dan paling berbakat sekalipun
sering gagal dalam hidupnya."
(D.J Schwartz)

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufik dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si). Sholawat dan salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari dunia kegelapan dan kebodohan menuju dunia yang penuh cahaya dan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Drs. H. Akh. Minhaji., Ph.D selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Yogyakarta.
2. Muchammad Abrori., M.Kom selaku Ketua Prodi Matematika dan Pendidikan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Sugiyanto, S.T, M.Si selaku dosen pembimbing pertama, yang telah membimbing dan memberikan arahan selama penulisan skripsi ini.
4. Ibu dan ayahku tercinta, Rr Nur Widayati dan M. Harwanto yang telah memberikan dukungan moral maupun material serta do'a yang tulus agar selalu diberikan yang terbaik oleh Allah SWT.

5. Saudara-saudaraku tersayang, Rr Ery Susilawati, R M. Anshori, Rr Umi Fitriasari, dan semua keluarga besarku yang terus mendorongku untuk terus maju.
6. Sahabat-sahabatku Maesaroh Ulfa dan Ria Andrean yang selalu memberikan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Teman-teman matematika angkatan 2008 serta semua pihak yang telah berkontribusi dalam penyelesaian skripsi ini baik secara langsung maupun tidak langsung. Semoga karya yang sangat sederhana ini bisa menjadi doa dan berkah bagi kita semua. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Yogyakarta, 1 Januari 2013

(Penulis)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

$S(t)$ = jumlah/proporsi individu yang sehat tetapi rentan terserang polio pada saat t,

$E(t)$ = jumlah/proporsi individu laten (gejala polio belum terlihat) pada saat t,

$I(t)$ = jumlah/proporsi individu yang terinfeksi pada saat t,

$V(t)$ = jumlah/proporsi individu yang sudah divaksinasi pada saat t,

$\mathrm{N}(t)$ = jumlah populasi pada saat t,

t = waktu,

A = laju imigrasi konstan populasi manusia,

β = probabilitas per satuan waktu penularan infeksi oleh populasi *Infective*,

$r\beta$ = probabilitas per satuan waktu penularan infeksi oleh populasi *Exposed*,

r = pengurangan penularan infeksi oleh populasi *Exposed*,

μ = laju kematian alami,

α = laju kematian akibat penyakit polio,

b = transisi dari keadaan laten menuju keadaan terinfeksi,

v = proporsi jumlah individu baru di kelompok *Susceptible* pindah ke kelompok *Vaccinated* karena sudah divaksinasi,

v_1 = laju dimana populasi kelompok *Exposed* yang divaksinasi karena gejala polio belum terlihat,

λ = nilai eigen,

R = Rasio reproduksi,

R_0 = rasio yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang tertular polio oleh satu individu *infective*,

R_1 = rasio yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang tertular polio oleh satu individu *exposed*,

R = himpunan vektor real,

R^n = himpunan vektor real bernilai n,

$(\mathrm{R}_0^+)^4$ = non negatif cone R^4,

$|.|$ = determinan,

$\|.\|$ = operator norm, misal $V = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$, maka $\|V\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$

$\in$ = elemen,

$\subset$ = himpunan bagian.

ABSTRAK

MODEL PENYEBARAN PENYAKIT POLIO DENGAN PENGARUH VAKSINASI

Oleh:
Rr Laila Ma'rifatun
(08610039)

Polio (*Poliomielitis*) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus polio. Penyakit ini menyerang seluruh tubuh (termasuk otot dan saraf) dan bisa menyebabkan kelemahan otot yang sifatnya permanen, kelumpuhan atau kematian. Polio menular melalui kontak antar manusia. Ruang lingkup digunakan untuk merancang pergerakan variabel penyebaran polio dalam populasi manusia. Ruang lingkup model ini dinyatakan dengan sistem persamaan diferensial yang didasarkan pada pergerakan infeksi polio.

Skripsi ini akan membahas tentang pengaruh vaksinasi terhadap penyebaran penyakit polio pada populasi manusia yang diselesaikan dalam bentuk pemodelan matematika. Penelitian dilakukan dengan cara studi literatur. Langkah-langkah yang dilakukan yaitu mengidentifikasi masalah, menyusun asumsi-asumsi untuk menyederhanakan model, mendefinisikan parameter-parameter, membuat diagram transfer, menentukan titik-titik ekuilibrium dan melakukan analisis kestabilan.

Selanjutnya dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz akan ditunjukkan bahwa jika rasio reproduksi $R < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dan pada titik ekuilibrium endemi terjadi bifurkasi untuk beberapa nilai parameter. Berdasarkan hasil yang diperoleh, selanjutnya dilakukan simulasi secara numeris dengan menggunakan nilai parameter yang berbeda-beda.

Kata Kunci : Pemodelan matematika, Vaksinasi Polio, Titik Ekuilibrium.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang Matematika turut memberikan peranan penting dalam menggambarkan fenomena penyebaran penyakit. Peranan tersebut dituangkan dalam bentuk model matematika yang dapat dianalisis sifat-sifatnya. Salah satu contoh model matematika tersebut adalah model epidemi *SIR* (*Susceptible – Infected – Recovered*). Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick (1927) dalam makalahnya yang berjudul "*A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*", yang kemudian menjadi peranan penting dalam perkembangan matematika epidemi.[1] Semakin berkembangnya ilmu pengetahuan, model epidemi *SIR* menjadi motivasi banyak ilmuwan untuk membuat model penyebaran penyakit secara lebih khusus.

Secara umum pemodelan matematika merupakan usaha perancangan rumusan matematika yang secara potensial menggambarkan bagaimana mendapatkan penyelesaian masalah matematika yang digeneralisasikan untuk diterapkan pada perilaku atau kejadian alam. Setelah melalui proses simulasi maka diperlukan sebuah eksperimen kembali sebagai langkah pencocokan mengenai apakah model tersebut valid atau perlu diadakan revisi.[2]

Model matematika epidemiologi yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah model penyebaran penyakit polio dengan peran vaksinasi yang dimodelkan

[1] Ripno Juli Iswanto, *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya* (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2012), p. 151.

[2] Ibid, *Pemodelan Matematika*, p. 16.

dalam bentuk *SEIV* (*Susceptible – Exposed – Infective – Vaccinated*). $S(t)$ menyatakan jumlah/proporsi individu yang rentan pada saat t, $E(t)$ menyatakan jumlah/proporsi individu yang terinfeksi tetapi belum terjangkit pada saat t, $I(t)$ menyatakan jumlah/proporsi individu yang terinfeksi pada saat t, dan $V(t)$ menyatakan jumlah/proporsi individu yang sudah divaksinasi pada saat t.

Poliomyelitis (polio) adalah penyakit menular yang sangat berbahaya. Penyakit ini disebabkan oleh Virus polio yang berasal dari genus *Enterovirus* dan family *Picorna viridae*. Virus ini menular melalui kotoran (feses) atau sekret tenggorokan orang yang terinfeksi. Virus polio masuk melalui ludah sehingga menyebabkan infeksi. Hal ini dapat terjadi dengan mudah bila tangan terkontaminasi atau benda-benda yang terkontaminasi dimasukkan ke dalam mulut. Virus polio berkembang biak di tenggorokan dan usus selama 4 sampai 35 hari, kemudian akan dikeluarkan melalui tinja selama beberapa minggu kemudian.[3]

Virus ini menyerang sistem saraf yang dapat menyebabkan kelumpuhan total dalam hitungan jam. *Poliomyelitis* dapat menyerang pada semua kelompok umur, namun yang paling rentan adalah kelompok umur kurang dari 3 tahun (lebih dari 50% dari semua kasus). Gejala awal adalah demam, kelelahan, sakit kepala, muntah, dan kekakuan pada leher dan nyeri pada anggota badan. Polio tidak dapat disembuhkan, tetapi dapat dicegah dengan vaksinasi. Vaksinasi adalah pemberian vaksin ke dalam tubuh untuk memberikan kekebalan aktif terhadap penyakit tersebut.

---

[3] http://akp2011.blogspot.com/2011/03/poliomyelitis.html, diakses tanggal 20 Juli 2012 pukul 15.04

Dalam tugas akhir ini, akan dianalisis model epidemi penyakit polio dengan pengaruh vaksinasi untuk mengetahui dampak dari vaksinasi bila diberikan dalam populasi *susceptible* dan *exposed*. Pada model tersebut ditemukan dua parameter ambang yaitu R_0 dan R_1 dimana R_0 adalah rasio yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang tertular polio oleh satu individu *infective* dan R_1 adalah rasio yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang tertular polio oleh satu individu *exposed*. Jumlah dari kedua nilai ambang tersebut dilambangkan dengan R (rasio reproduksi dasar), yaitu nilai ambang tajam yang sepenuhnya menentukan dinamika stabilitas dan hasil dari penyakit. Jika $R \leq 1$, maka kesetimbangan bebas penyakit stabil dan penyakit tidak menyebar, namun jika $R > 1$, maka penyakit akan menyebar.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang dibahas adalah:

1. Bagaimana model matematika penyebaran penyakit polio dengan pengaruh vaksinasi?
2. Bagaimana menentukan titik-titik ekuilibrium dan melakukan analisis kestabilan?
3. Apakah vaksinasi dapat membantu dalam pemberantasan polio?

1.3. Batasan Masalah

Pembahasan dalam skripsi ini dibatasi pada pendefinisian model *SEIV* penyebaran penyakit polio dengan pengaruh vaksinasi, penentuan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemi, serta analisis kestabilan titik-titik ekuilibrium tersebut. Perubahan jumlah populasi N hanya dipengaruhi oleh faktor imigrasi dan kematian, sedangkan faktor kelahiran diabaikan.

1.4. Tujuan Penelitian

1. Membentuk model matematika penyebaran penyakit polio dengan pengaruh vaksinasi,
2. Menentukan titik-titik ekuilibrium dan melakukan analisis kestabilan,
3. Mengetahui pengaruh vaksinasi dalam pemberantasan polio.

1.5. Manfaat Penelitian

1. Memberikan acuan dalam menyikapi kasus epidemi penyakit polio yang terjadi,
2. Memberikan masukan kepada peneliti lain yang ingin mengembangkan penelitian tentang model penyebaran penyakit polio.

1.6. Tinjauan Pustaka

Dalam penulisan tugas akhir ini digunakan beberapa sumber pustaka. Untuk beberapa pengertian dasar aljabar linear tentang nilai eigen, ruang vektor, dan transformasi linear mengacu pada Anton (2000). Beberapa pengertian dasar persamaan diferensial mengacu pada Ross (1984). Selanjutnya mengenai beberapa materi dasar teori sistem, yaitu mengenai sistem nonlinear, pengertian matriks Jacobian, titik ekuilibrium, dan linearisasi, serta teorema penting tentang kestabilan sistem nonlinear mengacu pada Bender (1978), perko (1991), Olsder (1994), Finizio dan ladas (1998), Murray (1993), dan Ripno (2012).

Penyusunan model *SEIV* penyakit polio dalam skripsi ini mengacu pada jurnal yang ditulis oleh Manju Agarwal dan Archana S. Bhadauria (2011) yang berjudul "*Modelling Spread of Polio with the Role of Vaccination*". Pada jurnal tersebut diberikan model penyebaran penyakit polio dengan pengaruh vaksinasi. Model yang dikembangkan pada jurnal tersebut dianalisis untuk mengetahui dampak dari vaksinasi jika diberikan pada populasi *Susceptible* dan *Exposed.*

Pembahasan model *SEIV* penyakit polio pada jurnal tersebut masih sangat singkat dan sederhana. Di dalam jurnal tersebut hanya dituliskan titik ekuilibrium beserta kestabilan dari model tersebut tanpa disertai bukti. Selanjutnya dalam skripsi ini akan diuraikan dan dijabarkan pembahasan model *SEIV* penyakit polio yang sudah tertera dalam jurnal tersebut. Titik-titik ekuilibrium yang dituliskan dalam jurnal tersebut akan dicari buktinya, akan lebih dipaparkan lagi analisis kestabilannya. Selain itu akan disertakan perhitungan simulasi modelnya.

1.7. Metode Penelitian

Penelitian dilakukan dengan cara studi literatur. Penelitian dimulai dengan mengidentifikasi masalah. Masalah yang dibahas pada penelitian ini adalah penyebaran penyakit polio dengan pengaruh vaksinasi. Langkah-langkah yang dilakukan yaitu menyusun asumsi-asumsi untuk menyederhanakan model, mendefinisikan parameter yang digunakan pada model seperti: laju imigrasi, laju kematian alami, laju kematian akibat penyakit polio, laju kontak dan sebagainya.

Setelah itu, membuat diagram transfer model penyebaran penyakit polio dengan pengaruh vaksinasi dan berdasarkan diagram transfer tersebut dituliskan model matematika penyebaran penyakit polio dengan pengaruh vaksinasi.

Selanjutnya menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik dari model tersebut. Kedua titik ekuilibrium tersebut kemudian dianalisis kestabilannya. Untuk menyelidiki kestabilan lokal dilakukan linearisasi pada sistem dengan menentukan matriks jacobian di titik ekuilibrium. Selanjutnya menentukan nilai eigen dari matriks jacobian tersebut dengan menggunakan definisi polinomial karakteristik suatu matriks. Salah satu alternatif menentukan nilai eigen polinomial karakteristik suatu matriks yaitu menggunakan teorema Routh-Hurtwitz.

Setelah sifat kestabilan titik ekuilibrium model diselidiki, langkah terakhir adalah melakukan simulasi pada model dengan memberikan nilai parameter-parameter berbeda yang bertujuan untuk mengilustrasikan perilaku populasi pada model yang dibentuk. Hasil dari simulasi disajikan dalam bentuk grafik menggunakan program maple.

1.8. Sistematika Penulisan

Penelitian tugas akhir ini dibagi dalam 4 bab dengan rincian masing-masing bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Membahas mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan yang memberikan gambaran singkat mengenai isi dari skripsi ini.

BAB II DASAR TEORI

Membahas mengenai teori-teori penunjang yang akan digunakan dalam bab selanjutnya, meliputi teori-teori dasar aljabar linear, persamaan diferensial, dan teori sistem.

BAB III MODEL PENYEBARAN PENYAKIT POLIO DENGAN PERAN VAKSINASI

Membahas model SEIV penyakit polio beserta kestabilannya berdasarkan titik ekuilibrium model tersebut dan simulasi model.

BAB IV PENUTUP

Berisi kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan yang telah dilakukan.

BAB IV

PENUTUP

1.1. Kesimpulan

1. Model epidemi SEIV penyakit polio mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0(S_0, E_0, I_0, V_0)$ dimana $S_0 = \dfrac{A}{\mu + v}$, $E_0 = 0$, $I_0 = 0$, $V_0 = \dfrac{v}{\mu}S_0$ dan titik ekuilibrium endemi $E^*(S^*, E^*, I^*, V^*)$ dimana $S^* = \dfrac{A}{(\mu + v)}\dfrac{1}{R}$, $E^* = \dfrac{A}{(b + \mu + v_1)}\left(1 - \dfrac{1}{R}\right)$, $I^* = \dfrac{(b + v_1)}{(\mu + \alpha)}E^*$ dan $V^* = \dfrac{v}{\mu}S^*$ dengan $R = \dfrac{A\beta\big(b + v_1 + r(\mu + \alpha)\big)}{(\mu + v)(b + \mu + v_1)(\mu + \alpha)}$.
2. Titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0(S_0, E_0, I_0, V_0)$ stabil asimtotik lokal jika $R < 1$. Sedangkan titik ekuilibrium endemi $E^*(S^*, E^*, I^*, V^*)$ terjadi bifurkasi untuk beberapa nilai parameter.
3. Vaksinasi belum tentu membantu dalam pemberantasan polio karena jika vaksinasi diberikan pada populasi *Exposed*, maka dapat meningkatkan tingkat endemik keseimbangan dan penyakit menyebar lebih cepat dari kecepatan biasa. Jadi vaksinasi hanya bertujuan untuk mencegah polio, bukan untuk mengobati polio. Penularan infeksi polio akibat populasi *Exposed* memainkan peran penting dalam penyebaran Polio dan karenanya beberapa langkah-langkah harus diambil untuk melacak populasi *Exposed* karena sangat sulit untuk melacak mereka karena gejala penyakit belum terlihat.

1.2. Saran

Pada penelitian ini, faktor kelahiran diabaikan. Oleh karena itu penulis menyarankan pada pembaca yang tertarik pada masalah ini agar pada penelitian selanjutnya menyertakan faktor kelahiran pada model tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, M. & Bhadauria, A.S., 2011, *Modeling Spread of Polio with the Role of Vaccination*, Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM) Vol. 6, Issue 2, pp. 552 – 571, Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University , Uttar Pradesh, India.

Anton, H., 2000, *Dasar-Dasar Aljabar Linear*, edisi ketujuh, (diterjemahkan oleh: Suminto, H.), Interaksara, Batam.

Bender, E.A., 1978, *An Introduction to Mathematical Modelling*, John Willey and Sons, Inc., USA.

Finizio, N. & Ladas , G., 1998, *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*, edisi kedua, (diterjemahkan oleh: Santoso, W.), Erlangga, Jakarta.

http://akp2011.blogspot.com/2011/03/poliomyelitis.html, diakses tanggal 20 Juli 2012 pukul 15.04

Iswanto, R.J., 2012, *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*, edisi pertama, Graha Ilmu, Yogyakarta.

Kartono, 2012, *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*, edisi pertama, Graha Ilmu, Yogyakarta.

Murray, J.D., 1993, *Mathematical Biology*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin.

Olsder, G.J., 1994, *Mathematical System Theory*, deflt university of technology, Belanda

Perko, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York Inc.

Ross, S.L., 1984, *Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc., Singapore.