

SKRIPSI

**KEPRIMAAN ALJABAR LINTASAN DAN ALJABAR
LINTASAN LEAVITT ATAS LAPANGAN**



MUHAMMAD HAFIZH NAUFAL

21106010031

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2025

**KEPRIMAAN ALJABAR LINTASAN DAN ALJABAR
LINTASAN LEAVITT ATAS LAPANGAN**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



diajukan oleh

MUHAMMAD HAFIZH NAUFAL

21106010031

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2025



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu 'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Muhammad Hafizh Naufal

NIM : 21106010031

Judul Skripsi : Keprimaan Aljabar Lintasan dan Aljabar Lintasan Leavitt atas Lapangan

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu 'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 20 Maret 2025

Pembimbing

Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

NIP. 19660731 200003 2 001



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-581/Un.02/DST/PP.00.9/04/2025

Tugas Akhir dengan judul : Keprimaan Aljabar Lintasan dan Aljabar Lintasan Leavitt atas Lapangan
yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : MUHAMMAD HAFIZH NAUFAL
Nomor Induk Mahasiswa : 21106010031
Telah diujikan pada : Jumat, 11 April 2025
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

SIGNED

Valid ID: 6808554bd890d



Penguji I

Arif Munandar, M.Sc.

SIGNED

Valid ID: 6805c9c58f788



Penguji II

Deddy Rahmadi, M.Sc.

SIGNED

Valid ID: 6805d09f16b02



Yogyakarta, 11 April 2025

UIN Sunan Kalijaga

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

SIGNED

Valid ID: 6808554bd4369

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Muhammad Hafizh Naufal

NIM : 21106010031

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 20 Maret 2025



Muhammad Hafizh Naufal

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



Karya sederhana ini saya persembahkan untuk diri
sendiri, keluarga, dan almamater UIN Sunan Kalijaga

Yogyakarta

HALAMAN MOTTO



”Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.

Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.”

(QS. Al-Insyirah/94: 5-6)

”Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi orang lain.”

(HR. ath-Thabrani)

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya yang tiada terhingga. Dengan segala kerendahan hati, saya bersyukur atas kemudahan dan kekuatan yang diberikan-Nya sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan lancar. *Shalawat* beserta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita, nabi akhir zaman, Rasulullah Muhammad SAW, yang telah memberikan teladan hidup dan petunjuk yang hakiki bagi seluruh umat manusia. Skripsi yang berjudul "Keprimaan Aljabar Lintasan dan Aljabar Lintasan Leavitt atas Lapangan" ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika di Universitas Islam Negeri (UIN) Sunan Kalijaga Yogyakarta.

Tentu dalam perjalanan penyusunan skripsi ini, penulis mengalami banyak tantangan dan rintangan. Namun, berkat bantuan, bimbingan, dan dukungan dari berbagai pihak, akhirnya skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, pada kesempatan yang berbahagia ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Almamater UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta yang telah menjadi wadah dan kesempatan bagi saya untuk belajar dan berkembang. Semoga UIN Sunan Kalijaga terus maju dan menjadi tempat lahirnya generasi penerus yang berakhlak mulia dan berprestasi.
2. Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sekaligus Dosen Pembimbing Skripsi yang telah menyediakan banyak waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.

3. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika sekaligus dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengajaran selama menempuh pendidikan.
4. Bapak/Ibu dosen Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga yang telah memberikan ilmu, pengetahuan, dan wawasan baru selama masa perkuliahan.
5. Papah dan mamah tercinta yang selalu memberikan do'a, motivasi, dan kasih sayang tak terhingga.
6. Lia Aliatunnisa, perempuan hebat yang selalu ada dalam setiap langkah perjalanan ini. Terima kasih atas do'a dan dukungan yang tiada henti.
7. Teman-teman di Program Studi Matematika 2021, atas kebersamaan, dukungan, dan semangat yang telah kalian berikan selama masa perkuliahan.
8. Teman-teman di Program Studi Matematika 2020, yang telah menjadi teman diskusi, berbagi tawa, dan memberikan dukungan.
9. Kelompok KKN 170 Sukamukti dalam pertemuan singkatnya, namun kebersamaan kita begitu bermakna dan tak terlupakan.
10. Teman-teman di Saintek Musik yang telah menjadi tempat saya menyalurkan hobi dan memberikan semangat baru.
11. Kawan-kawan di IMM Saintek yang selalu membawa energi positif dan kebersamaan yang memotivasi.
12. Komunitas Pecinta Aljabar yang telah memberikan dorongan dan dukungan.
13. Semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan, baik secara langsung maupun tidak langsung. Meskipun tidak semuanya dapat disebut-

an satu per satu, terima kasih penulis ucapkan atas segala bentuk kebaikan yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang membangun untuk perbaikan di masa mendatang. Penulis percaya bahwa segala masukan yang diberikan akan menjadi bekal berharga bagi perjalanan akademik selanjutnya.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membutuhkan dan menjadi amal jariyah bagi penulis serta semua pihak yang telah membantu. Dengan segala kerendahan hati, saya berharap agar Allah SWT senantiasa memberikan rahmat dan hidayah-Nya kepada kita semua, serta menjadikan karya ini sebagai langkah kecil dalam memberikan kontribusi bagi pengembangan ilmu pengetahuan. Aamiin.

Yogyakarta, 20 Maret 2025

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMBANG	xiii
INTISARI	xiv
ABSTRACT	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	4
1.3. Rumusan Masalah	4
1.4. Tujuan Penelitian	5
1.5. Manfaat Penelitian	5
1.6. Tinjauan Pustaka	6
1.7. Metode Penelitian	7
1.8. Sistematika Penulisan	8
II DASAR TEORI	10
2.1. Grup, Ring, dan Lapangan	10

2.2. Ruang Vektor atas Lapangan	25
2.3. Graf	37
2.3.1. Konsep Keterhubungan pada Graf	38
2.3.2. Graf berarah	40
III ALJABAR DAN QUIVER	41
3.1. Aljabar atas Lapangan	41
3.1.1. Keprimaan Aljabar atas Lapangan	52
3.2. Quiver	54
3.2.1. Sifat-Sifat Quiver	57
3.2.2. Representasi Quiver	62
IV ALJABAR LINTASAN DAN ALJABAR LINTASAN LEAVITT ATAS	64
LAPANGAN SERTA KEPRIMAANNYA	64
4.1. Aljabar Lintasan atas Lapangan	64
4.2. Aljabar Lintasan Leavitt atas Lapangan	70
4.3. Keprimaan Aljabar Lintasan dan Aljabar Lintasan Leavitt atas Lapangan	84
V PENUTUP	95
5.1. Kesimpulan	95
5.2. Saran	96
DAFTAR PUSTAKA	96
Curriculum Vitae	99

DAFTAR GAMBAR

1.1 Skema Metode Penelitian	8
2.1 Graf berhingga G_1	38
2.2 Graf tak hingga G_2	38
2.3 Graf trivial G_3	38
2.4 Graf G_4	39
2.5 Graf tak berarah G_5	40
2.6 Graf berarah G_6	40
3.1 Quiver A	54
3.2 Subquiver penuh P	55
3.3 Subquiver tak penuh R	55
3.4 Quiver B	58
4.1 Quiver C	65
4.2 Quiver D	67
4.3 Quiver Perluasan A^*	70
4.4 Quiver E	90
4.5 Quiver F	92

DAFTAR LAMBANG

$x \in A$	: x anggota A
$A \subseteq X$	: A himpunan bagian (<i>subset</i>) dari X
$\mathbb{Z}$	: himpunan semua bilangan bulat
$\mathbb{R}$	: himpunan semua bilangan real
K	: sebarang lapangan
$M_{n \times n}(K)$	: matriks ukuran $n \times n$ atas lapangan K
$\preceq$	: relasi mendahului
$Path(Q)$	: himpunan semua lintasan di quiver Q
$\bar{H}$	: penyaturasi subhimpunan herediter H
$\mathcal{H}_Q$	: himpunan semua subhimpunan Q_0 yang herediter dan tersaturasi
$T(v)$	: pohon dari verteks v
$T(H)$	: pohon dari himpunan H
$\bigcup_{i=0}^n H_i$	: gabungan $H_0 \cup H_1 \cup \cdots \cup H_n$
$\sum_{i=1}^n a_i$	: penjumlahan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
■	: akhir suatu bukti
□	: akhir suatu contoh
$\rightarrow$	: menuju
$(\Rightarrow)$	: pembuktian ke arah kanan
$(\Leftarrow)$	: pembuktian ke arah kiri

INTISARI

KEPRIMAAN ALJABAR LINTASAN DAN ALJABAR LINTASAN LEAVITT ATAS LAPANGAN

Oleh

Muhammad Hafizh Naufal

21106010031

Aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan dibangun dari graf berarah atau quiver dan merupakan aljabar bebas. Subhimpunan dari himpunan verteks pada quiver yang bersifat herediter tersaturasi membangun ideal dalam aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan. Terdapat syarat perlu dan cukup suatu quiver sedemikian sehingga ideal tersebut bersifat prima. Hal ini berakibat adanya syarat perlu dan cukup aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan bersifat prima. Aljabar lintasan atas lapangan bersifat prima jika dan hanya jika quiver memenuhi syarat ketiga ekor dari maksimal dan setiap verteksnya memiliki sisi balik. Aljabar lintasan leavitt atas lapangan bersifat prima jika dan hanya jika quiver memenuhi syarat ketiga dari ekor maksimal.

Kata kunci : Quiver, Aljabar Lintasan atas Lapangan, Aljabar Lintasan Leavitt atas Lapangan, Subhimpunan Herediter Tersaturasi, Ekor Maksimal

ABSTRACT

ON PRIMENESS OF PATH ALGEBRA AND LEAVITT PATH ALGEBRA OVER FIELD

By

Muhammad Hafizh Naufal

21106010031

The path algebra and leavitt path algebra over a field are constructed from directed graphs or quivers and are considered free algebras. A subset of the set of vertices in the quiver, which is hereditary and saturated, forms an ideal within the path algebra and leavitt path algebra over the field. There are necessary and sufficient conditions for a quiver such that the ideal is prime. Consequently, there are necessary and sufficient conditions for the path algebra and leavitt path algebra over the field to be prime. The path algebra over a field is prime if and only if the quiver satisfies the third maximal tail condition and each vertex has a return edge. The leavitt path algebra over a field is prime if and only if the quiver satisfies the third maximal tail condition.

Keyword : Quiver, Path Algebra over Field, Leavitt Path Algebra over Field, Hereditary saturated subset, Maximal tail

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Islam secara konsisten mendorong umatnya untuk terus belajar, mengembangkan, dan memperluas ilmu pengetahuan di berbagai bidang. Hal ini meliputi tidak hanya ilmu agama yang mendalam tetapi juga ilmu pengetahuan duniawi yang dapat bermanfaat bagi seluruh umat manusia. Firman Allah SWT pada potongan surat *Al-Mujadilah Ayat 11*:

يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya: "Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. (Q.S. Al-Mujadilah/58: 11)"

Ayat ini menekankan pentingnya keimanan dan ilmu pengetahuan dalam Islam. Orang yang beriman dan memiliki ilmu pengetahuan diberi kedudukan yang lebih tinggi oleh Allah. Ilmu pengetahuan tidak hanya melibatkan pengetahuan agama, tetapi juga ilmu duniawi yang bermanfaat bagi masyarakat. Dengan memiliki ilmu, seorang individu dapat memberikan kontribusi positif bagi komunitas dan dirinya sendiri, sehingga meningkatkan derajat mereka di mata Allah dan manusia. Dalam konteks ini, matematika memegang peranan penting sebagai ilmu dasar yang mendasari berbagai pengetahuan lainnya.

Ilmu matematika mencakup berbagai bidang seperti aritmetika, geometri,

kalkulus, dan aljabar. Setiap bidang ini memiliki aplikasi yang luas dalam kehidupan sehari-hari dan ilmu pengetahuan. Aljabar merupakan salah satu cabang matematika yang fundamental dan esensial. Aljabar memungkinkan kita untuk menyederhanakan dan memecahkan persamaan kompleks melalui penggunaan simbol dan variabel yang mewakili angka atau nilai yang tidak diketahui.

Aljabar abstrak adalah cabang dari matematika yang secara khusus mempelajari berbagai struktur aljabar, seperti grup, ring, lapangan, modul, ruang vektor, dan aljabar itu sendiri. Struktur-struktur ini dianalisis dengan menggunakan sifat-sifat dasar yang dimilikinya, seperti asosiativitas, identitas, dan inversibilitas, tanpa mengacu pada elemen spesifik yang terdapat dalam struktur tersebut. Pendekatan abstrak ini memungkinkan para matematikawan untuk memahami dan menggeneralisasi sifat-sifat mendasar dari operasi matematika, serta menerapkannya dalam berbagai konteks yang berbeda, baik dalam teori maupun aplikasi praktis.

Teori grup adalah salah satu konsep fundamental dalam aljabar abstrak. Grup adalah kumpulan elemen yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi tiga aksioma utama yaitu asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemen memiliki invers (Gallian, 2021). Teori ring memperluas konsep grup dengan menambahkan operasi kedua, yaitu perkalian, yang bersama dengan penjumlahan membentuk struktur lebih kompleks. Ring harus memenuhi sifat-sifat tertentu yaitu komutatif penjumlahan, asosiatif perkalian, serta distributif antara penjumlahan dan perkalian (Gallian, 2021). Ruang vektor adalah grup komutatif penjumlahan yang dilengkapi operasi perkalian skalar dan memenuhi aksioma tertentu (Anton & Rorres, 2013). Ruang vektor yang dilengkapi operasi perkalian dan memenuhi aksioma ring disebut aljabar (Fraleigh, 2014).

Teori graf adalah cabang dari matematika yang mempelajari graf, yaitu struk-

tur yang terdiri dari titik atau verteks (vertices) yang dihubungkan oleh garis atau *edge* (edges). Graf dapat diklasifikasikan ke dalam berbagai jenis. Menurut (Rosen, 2012), berdasarkan jenis *edge*-nya graf dibagi menjadi dua yaitu graf berarah (*directed*) dan graf tak berarah (*undirected*). Graf berarah dalam beberapa literasi aljabar disebut quiver.

Quiver menurut (Assem et al., 2006) adalah pasangan 4 tupel yang ditulis $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ dimana Q_0 merupakan himpunan titik atau verteks, Q_1 merupakan himpunan sisi atau *edge*, dan s, t merupakan pemetaan himpunan *edge* ke himpunan verteks, yaitu $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ dimana untuk setiap $\alpha \in Q_1$ berlaku $s(\alpha) \in Q_0$ merupakan fungsi sumber dan $t(\alpha)$ merupakan fungsi tujuan (Assem et al., 2006). Quiver Q dapat diperluas menjadi quiver perluasan Q^* dengan menambahkan *edge* arah berlawanan (*ghost edge*) dengan *edge* yang ada pada Q .

Himpunan semua lintasan dalam quiver Q dinotasikan $Path(Q)$. Aljabar lintasan atas lapangan K , dinotasikan KQ , membentuk K -aljabar bebas dengan basis $Path(Q)$ (Pino, 2005). Aljabar lintasan leavitt atas lapangan K , dinotasikan $L_K(Q)$, juga membentuk K -aljabar bebas dengan basis $Path(Q^*)$ (Abrams et al., 2017). Ideal pada aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt dapat dibangun oleh subhimpunan herediter H . Sifat keprimaan suatu aljabar dapat ditentukan dari idealnya.

Topik keprimaan membahas syarat perlu dan cukup sesuatu bersifat prima. Suatu aljabar dikatakan prima jika ideal nolnya adalah prima. Penelitian (Wardati et al., 2014b) dan (Wardati et al., 2014a) menunjukkan adanya syarat perlu dan cukup pada quiver Q sedemikian sehingga aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt atas ring komutatif dengan elemen satuan bersifat prima mendasar. Berdasarkan penelitian tersebut, studi ini akan membahas keprimaan aljabar lintasan dan aljabar

lintasan Leavitt atas lapangan. Keprimaan ideal pada aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt akan menjadi pendekatan utama dalam penelitian ini, sehingga ideal nol yang prima akan menyebabkan aljabarnya bersifat prima.

1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada tugas akhir ini adalah keprimaan aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan. Aljabar atas lapangan hanya dibatasi mengenai dasar-dasarnya sampai ideal prima. Quiver dibatasi sampai sifat hereditier dan tersaturasi serta kondisi ekor maksimal. Aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan dibatasi sampai ditemukan syarat perlu dan cukup sifat keprimaannya. Sebagai dasar digunakan konsep-konsep aljabar abstrak dan pengenalan graf berarah (quiver).

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep dasar tentang aljabar prima atas lapangan?
2. Bagaimana konsep dasar tentang quiver dan sifat-sifatnya?
3. Bagaimana konsep dasar tentang aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan?
4. Bagaimana syarat ideal prima pada aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan?
5. Bagaimana syarat quiver yang memenuhi keprimaan aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari tentang konsep dasar aljabar prima atas lapangan.
2. Mempelajari tentang konsep dasar quiver dan sifat-sifatnya.
3. Mempelajari tentang konsep dasar aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt.
4. Mempelajari tentang syarat ideal prima pada aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan.
5. Mengetahui kondisi quiver yang memenuhi keprimaan aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman tentang konsep dasar aljabar prima atas lapangan.
2. Memberikan pemahaman tentang quiver beserta sifat-sifatnya.
3. Memberikan pemahaman tentang aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan.
4. Memberikan pemahaman tentang syarat ideal prima pada aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan.
5. Memberikan gambaran tentang syarat keprimaan aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan.

1.6. Tinjauan Pustaka

Aljabar adalah struktur matematika yang membahas ruang vektor atas lapangan yang juga merupakan ring. Konsep dasar aljabar abstrak yang mencakup teori grup dan teori ring hingga lapangan dibahas dalam (Gallian, 2021). Aljabar lintasan, yang menjelaskan ruang vektor atas lapangan, dijelaskan lebih lanjut oleh (Anton & Rorres, 2013). Graf, yang terdiri dari titik-titik atau verteks yang dihubungkan oleh *edge*, secara aljabar didefinisikan oleh (Rosen, 2012). Pada penelitian ini, jenis graf yang digunakan adalah graf berarah atau quiver.

Pembahasan mengenai aljabar atas lapangan K disampaikan dalam (Fraleigh, 2014). Buku (Assem et al., 2006) menguraikan konsep dasar quiver. Sifat-sifat quiver dijelaskan dalam jurnal (Abrams & Pino, 2008), (Pino et al., 2009), serta buku (Abrams et al., 2017).

Aljabar lintasan adalah jenis aljabar yang dibangun dari graf berarah atau quiver, di mana elemen-elemennya adalah lintasan pada quiver tersebut. Definisi aljabar lintasan atas lapangan KQ diambil dari penelitian (Pino, 2005). Selain itu, aljabar lintasan Leavitt merupakan perluasan dari aljabar lintasan. Definisi aljabar lintasan Leavitt atas lapangan $L_K(Q)$ dijelaskan dalam jurnal (Abrams & Pino, 2005). Berdasarkan (Wardati, 2017), ideal dalam KQ dan $L_K(Q)$ dapat dibangun oleh subhimpunan verteks yang herediter.

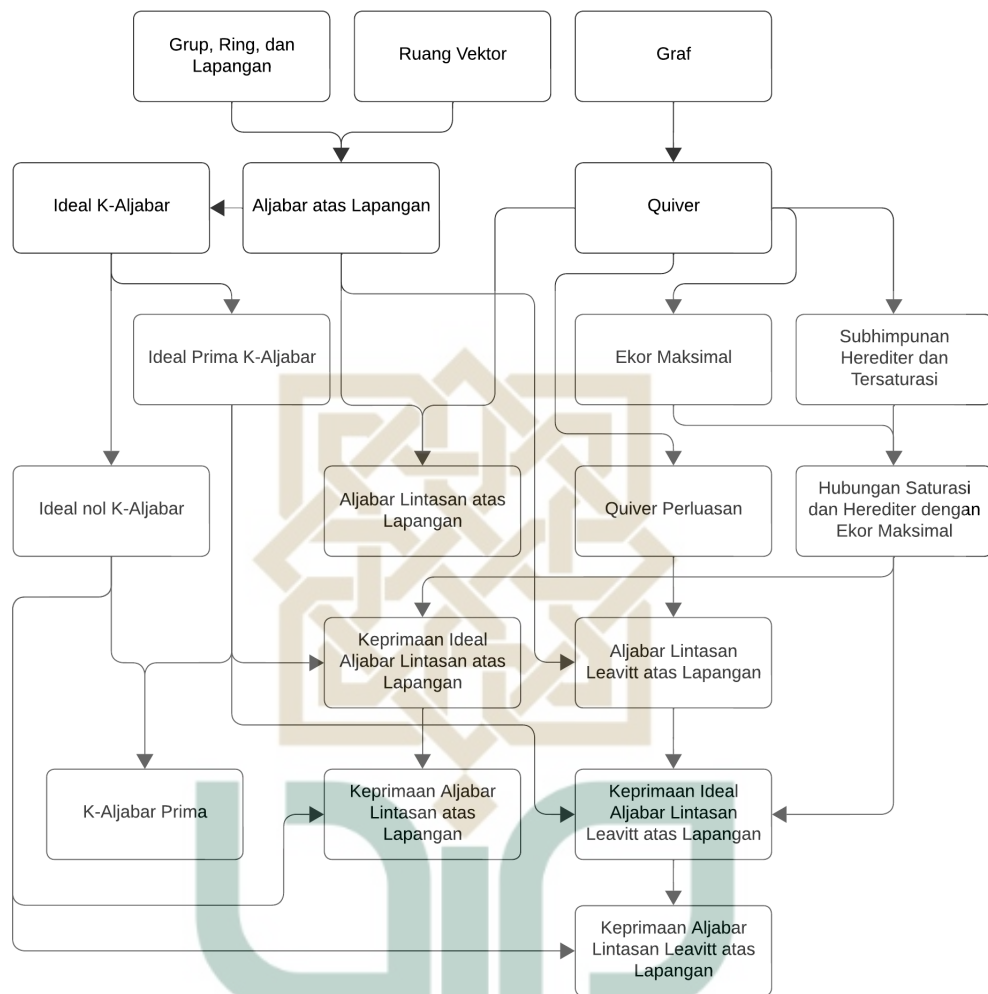
Penelitian (Pino et al., 2009) menemukan syarat perlu dan cukup untuk suatu aljabar lintasan leavitt agar bersifat primitif. Aljabar lintasan leavitt sederhana telah diteliti oleh (Waliyanti, 2013). Studi terkait keprimaan aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas ring komutatif telah dilakukan pada (Wardati et al., 2014b) dan (Wardati et al., 2014a). Terinspirasi dari referensi-referensi tersebut, penelitian ini akan membahas keprimaan aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapang-

an.

1.7. Metode Penelitian

Penelitian ini penulis menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal terkait topik penelitian yaitu; konsep dasar aljabar, quiver, aljabar lintasan, dan aljabar lintasan leavitt. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

1. Membahas konsep dasar dari grup, ring, lapangan, ruang vektor, dan graf.
2. Membahas konsep dasar dari aljabar prima atas lapangan dan quiver.
3. Membahas aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan.
4. Membahas ideal prima aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan.
5. Mengetahui syarat quiver yang memenuhi keprimaan aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan.



Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi lima bab, yaitu sebagai berikut:

BAB 1 : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

- BAB 2** : Bab ini membahas tentang dasar-dasar dari aljabar abstrak dan graf beserta jenis-jenis graf.
- BAB 3** : Bab ini membahas tentang dasar-dasar aljabar prima atas lapangan dan quiver.
- BAB 4** : Bab ini membahas tentang aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan beserta keprimaannya
- BAB 5** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB V

PENUTUP

Bab penutup ini memberikan rangkuman dari seluruh pembahasan yang telah disampaikan pada bab-bab sebelumnya, serta menyajikan kesimpulan utama yang dapat diambil dari analisis yang telah dilakukan. Selain itu, bab ini juga memuat saran untuk penelitian lebih lanjut.

5.1. Kesimpulan

Aljabar lintasan KQ atas lapangan K dan aljabar lintasan leavitt $L_K(Q)$ atas lapangan K dikonstruksi dari quiver Q . Suatu quiver bukan merupakan struktur, diperlukan adanya representasi terhadap lintasan-lintasan pada quiver dan syarat-syarat tertentu sehingga dapat menjadi struktur aljabar. Aljabar lintasan KQ atas lapangan K dan aljabar lintasan leavitt $L_K(Q)$ atas lapangan K merupakan K -aljabar yang dibangun oleh lintasan-lintasan dari quiver Q .

Ideal I_H dalam aljabar lintasan dan $I(H)$ dalam aljabar lintasan leavitt dapat dibangun dari subhimpunan $H \subseteq Q_0$ yang bersifat herediter dan tersaturasi. Ideal yang bersifat prima mengakibatkan adanya syarat perlu dan cukup kondisi suatu quiver. Ideal I_H dalam KQ adalah ideal prima jika dan hanya jika $M = Q_0 \setminus H$ merupakan ekor maksimal dan untuk sebarang lintasan μ dengan $t(\mu) \in M$, terdapat lintasan $\nu \in KQ$ sedemikian sehingga $t(\mu) = s(\nu)$ dan $s(\mu) = t(\nu)$. Ideal $I(H)$ dalam $L_K(Q)$ adalah ideal prima jika dan hanya jika $M = Q_0 \setminus H$ merupakan ekor maksimal. Ideal nol yang bersifat prima mengakibatkan syarat perlu dan cukup KQ dan $L_K(Q)$ yang prima. Aljabar lintasan KQ atas lapangan K prima jika

dan hanya jika untuk sebarang $v, w \in Q_0$, terdapat $y \in Q_0$ sedemikian sehingga $v \preceq y, w \preceq y$ dan untuk sebarang lintasan μ dengan $t(\mu) \in M$, terdapat lintasan $\nu \in KQ$ sedemikian sehingga $t(\mu) = s(\nu)$ dan $s(\mu) = t(\nu)$. Aljabar lintasan leavitt $L_K(Q)$ atas lapangan K terhadap quiver Q bersifat prima jika dan hanya jika untuk sebarang $v, w \in Q_0$, terdapat $y \in Q_0$ sedemikian sehingga $v \preceq y, w \preceq y$.

Keprimaan aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan dapat dilihat dari syarat perlu dan cukup ideal nol yang bersifat prima. Selain itu, ideal dalam aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt atas lapangan yang dibangun oleh subhimpunan herediter dan tersaturasi dapat dilihat juga keprimaannya.

5.2. Saran

Penelitian ini masih terbatas pada ruang lingkup yang sempit dalam aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt. Kedua aljabar tersebut merupakan objek kajian dalam struktur aljabar yang memiliki cakupan sangat luas untuk dieksplorasi lebih lanjut. Penelitian ke depan dapat dikembangkan dengan mengkaji sifat-sifat seperti kesemiprimaan (*semiprimeness*), kesederhanaan (*simplicity*), kesemisederhanaan (*semisimplicity*), keprimitifan (*primitivity*) pada aljabar lintasan dan aljabar lintasan leavitt, serta banyak aspek lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Abrams, G., Ara, P., & Molina, M. S. (2017). *Leavitt Path Algebras*. Springer.
- Abrams, G. & Pino, G. A. (2005). *The Leavitt Path Algebra of A Graph*. Journal of Algebra, 293(2):319-334.
- Abrams, G. & Pino, G. A. (2008). *The Leavitt Path Algebras of Arbitrary Graphs*. Houston Journal of Mathematics, 34(2):423-442.
- Anton, H. & Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra, Applications Version*. Wiley, 11 edition.
- Ara, P., Moreno, M. A., & Pardo, E. (2006). *Nonstable K-theory for Graph Algebras*. Algebras and Representation Theory, 10(2):157-158.
- Assem, I., Simson, D., & Skowronski, A. (2006). *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge University Press.
- Fraleigh, J. B. (2014). *First Course in Abstract Algebra*. Pearson, 7 edition.
- Gallian, J. A. (2021). *Contemporary Abstract Algebra*. CRC Press, 10 edition.
- Pino, G. A. (2005). *On Maximal Left Quotient Systems and Leavitt Path Algebras*. Universidad de Málaga.
- Pino, G. A., Pardo, E., & Molina, M. S. (2009). *Prime Spectrum and Primitive Leavitt Path Algebras*. Indiana University Mathematics Journal, 58(2):869-890.
- Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, 7 edition.

- Waliyanti, I. K. (2013). *Aljabar Lintasan Leavitt Sederhana*. Delta-Pi: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 2(2).
- Wardati, K. (2017). *Kesemiprimaan Aljabar Lintasan dan Aljabar Lintasan Leavitt*. Jurnal Fourier.
- Wardati, K., Wijayanti, I. E., & Wahyuni, S. (2013). *Free Ideal in Free Algebra over Ring*. Dipresentasikan di IndoMS International Conference on Mathematics and its Applications (IICMA) 2013, Program Studi Matematika, Universitas Gadjah Mada.
- Wardati, K., Wijayanti, I. E., & Wahyuni, S. (2014a). *Keprimaan Mendasar Aljabar Lintasan Leavitt atas Ring Komutatif*. Universitas Hasanuddin, Seminar Nasional Aljabar dan Pengajarannya, 3.
- Wardati, K., Wijayanti, I. E., & Wahyuni, S. (2014b). *On Primeness of Path Algebras over A Unital Commutative Ring*. JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 34(2):121-138.
- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach Science Publishers.