

**SKRIPSI**

**PELABELAN PRIMA PADA HASIL OPERASI KORONA  
ANTARA GRAF SIKLUS DAN GRAF BINTANG SERTA  
GRAF IDENTITAS**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA**

**2025**

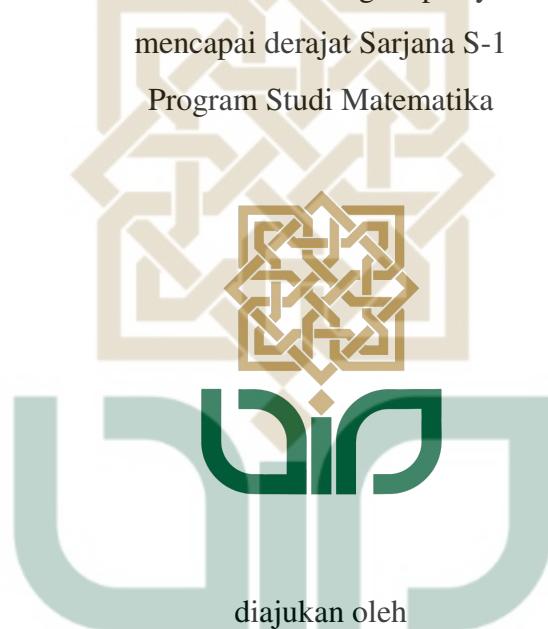
**PELABELAN PRIMA PADA HASIL OPERASI KORONA  
ANTARA GRAF SIKLUS DAN GRAF BINTANG SERTA  
GRAF IDENTITAS**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



diajukan oleh

AHLUL QULUB  
STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
21106010047  
**SUNAN KALIJAGA**  
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2025



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta  
di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Ahlul Qulub  
NIM : 21106010047

Judul Skripsi : Pelabelan Prima pada Hasil Operasi Korona antara Graf Siklus dan Graf Bintang serta Graf Identitas

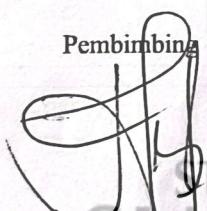
sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 13 Agustus 2025

Pembimbing 2

Pembimbing 1  
  
Arif Munandar, M.Sc.  
NIP: 19920721 201903 1 013

  
Deddy Rahmadi, M.Sc.  
NIP: 19930807 202203 1 001



KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1704/Un.02/DST/PP.00.9/08/2025

Tugas Akhir dengan judul : PELABELAN PRIMA PADA HASIL OPERASI KORONA ANTARA GRAF SIKLUS DAN GRAF BINTANG SERTA GRAF IDENTITAS

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : AHLUL QULUB  
Nomor Induk Mahasiswa : 21106010047  
Telah diujikan pada : Jumat, 01 Agustus 2025  
Nilai ujian Tugas Akhir : A-

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

**TIM UJIAN TUGAS AKHIR**



Ketua Sidang

Deddy Rahmadi, M.Sc.

SIGNED

Valid ID: 68995cd0acdf6



Pengaji I

Arif Munandar, M.Sc.

SIGNED

Valid ID: 689aa2a6d1a0e



Pengaji II

Noor Saif Muhammad Mussafi, S.Si., M.Sc.,

Ph.D.

SIGNED

Valid ID: 689c079f02f78



Yogyakarta, 01 Agustus 2025

UIN Sunan Kalijaga

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

SIGNED

Valid ID: 689c0e144a356

## **SURAT PERNYATAAN KEASLIAN**

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Ahlul Qulub  
NIM : 21106010047  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 21 Juli 2025



Ahlul Qulub

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
YOGYAKARTA

## HALAMAN PERSEMBAHAN



*Skripsi ini dipersembahkan untuk orang tua tersayang  
dan almamater tercinta.*

## **HALAMAN MOTTO**



”Allah tidak membebani seseorang, kecuali menurut kesanggupannya,”

(QS. Al-Baqarah [2]: 286).

”Sesungguhnya pertolongan akan datang bersama kesabaran.” -HR. Ahmad

## PRAKATA

*Allhamdulillahirabbil'alamin*, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Pelabelan Prima pada Hasil Operasi Korona antara Graf Siklus dan Graf Bintang serta Graf Identitas". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Ephra Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Deddy Rahmadi, M.Sc. dan Arif Munandar, M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
4. Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.

6. Orang Tua tercinta, Bapak Baharudin dan Ibu Warsiti, yang telah memberikan dukungan, motivasi serta do'a untuk semua hal-hal baik. Tidak lupa juga ketiga kakak saya yang juga ikut andil dalam memberikan semangat yang tak henti-henti.
7. Rahma Hanifah, yang selalu ada di setiap langkah perjalanan saya dalam menyelesaikan skripsi ini dan memberi motivasi setiap kali saya merasa ingin menyerah.
8. Ridwan Muh. Saputra dan Kharisma Muh. Adzani selaku teman-teman satu perjuangan skripsi di konsentrasi aljabar serta teman-teman satu grup bimbingan skripsi Bapak Deddy Rahmadi, M.Sc. yang telah berjuang bersama sampai sekarang.
9. Teman-teman grup bapak-bapak matematika angkatan 2021, yang telah memberikan warna dan momen berharga dalam sehari-hari sampai detik ini.
10. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kata sempurna, oleh karena itu penulis memohon maaf, serta berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Terima kasih.

Yogyakarta, 5 Agustus 2025

Ahlul Qulub

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR</b> .....	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	<b>iii</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN</b> .....	<b>iv</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	<b>v</b>
<b>HALAMAN MOTTO</b> .....	<b>vi</b>
<b>PRAKATA</b> .....	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>ix</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR LAMBANG</b> .....	<b>xvi</b>
<b>INTISARI</b> .....	<b>xvii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xviii</b>
<b>I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang Masalah .....	1
1.2. Batasan Masalah .....	4
1.3. Rumusan Masalah .....	4
1.4. Tujuan Penelitian .....	4
1.5. Manfaat Penelitian .....	5
1.6. Tinjauan Pustaka .....	5
1.7. Metode Penelitian .....	7
1.8. Sistematika Penulisan .....	8
<b>II DASAR TEORI</b> .....	<b>9</b>

2.1. Graf . . . . .	9
2.1.1. Adjacent dan Insiden . . . . .	10
2.1.2. Derajat Simpul . . . . .	11
2.1.3. Keterhubungan . . . . .	12
2.1.4. Jenis-jenis Graf . . . . .	13
2.2. Faktor Persekutuan Terbesar . . . . .	16
2.3. Fungsi . . . . .	18
2.3.1. Fungsi Bijektif . . . . .	19
2.3.2. Operasi Modulo . . . . .	20
2.4. Dasar Teori Grup . . . . .	22
2.4.1. Subgrup . . . . .	25
2.5. Pelabelan Graf . . . . .	27
2.5.1. Pelabelan Prima pada Graf . . . . .	28
<b>III PELABELAN PRIMA PADA HASIL OPERASI KORONA ANTARA GRAF SIKLUS DAN GRAF BINTANG . . . . .</b>	<b>31</b>
3.1. Operasi Korona . . . . .	31
3.2. Pelabelan Prima Pada Graf $C_3 \circ S_{1,n}$ . . . . .	34
3.3. Pelabelan Prima Pada Graf $C_4 \circ S_{1,n}$ . . . . .	49
<b>IV PELABELAN PRIMA PADA GRAF IDENTITAS GRUP <math>\mathbb{Z}_n</math> . . . . .</b>	<b>80</b>
4.1. Graf Identitas . . . . .	80
4.2. Struktur Graf Identitas Grup $\mathbb{Z}_n$ untuk $n$ Genap dan $n$ Ganjil . . . . .	82
4.2.1. Struktur Graf Identitas Grup $\mathbb{Z}_n$ untuk $n$ Ganjil . . . . .	82
4.2.2. Struktur Graf Identitas Grup $\mathbb{Z}_n$ untuk $n$ Genap . . . . .	87
4.2.3. Pelabelan Prima pada Graf Identitas Grup $\mathbb{Z}_n$ untuk $n$ Ganjil dan $n$ Genap . . . . .	91
<b>V PENUTUP . . . . .</b>	<b>98</b>

5.1. Kesimpulan . . . . .	98
5.2. Saran . . . . .	99
<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>LAMPIRAN . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>Curriculum Vitae . . . . .</b>	<b>103</b>



## **DAFTAR TABEL**

2.1	Derajat pada graf $I$	11
4.1	Tabel Cayley ( $K, *$ )	81



## DAFTAR GAMBAR

1.1 Skema Metode Penelitian . . . . .	8
2.1 Graf $G$ . . . . .	10
2.2 Graf $H$ . . . . .	10
2.3 Graf $I$ . . . . .	11
2.4 Graf $A$ . . . . .	12
2.5 Graf $B$ . . . . .	12
2.6 Graf $B_1$ . . . . .	13
2.7 Graf $B_2$ . . . . .	13
2.8 Graf $B_3$ . . . . .	13
2.9 Graf Reguler . . . . .	13
2.10 Graf Kosong . . . . .	13
2.11 Graf Lengkap . . . . .	14
2.12 Graf Bipartit . . . . .	14
2.13 Graf $C_3$ . . . . .	15
2.14 Graf $C_4$ . . . . .	15
2.15 Graf $C_5$ . . . . .	15
2.16 Graf $S_{1,2}$ . . . . .	15
2.17 Graf $S_{1,3}$ . . . . .	15
2.18 Graf $S_{1,4}$ . . . . .	15
2.19 Graf $C_3$ . . . . .	28
2.20 Graf $C_3$ . . . . .	28
2.21 Graf $C_3$ . . . . .	29

2.22 Graf $C_3$	29
2.23 Graf $C_4$	30
2.24 Graf $C_4$	30
3.1 Graf $C_3$	32
3.2 Graf $S_{1,2}$	32
3.3 Graf $C_3 \circ S_{1,2}$	33
3.4 Graf $C_3$	48
3.5 Graf $S_{1,4}$	48
3.6 Graf $C_3 \circ S_{1,4}$	49
3.7 Graf $C_4$	78
3.8 Graf $S_{1,6}$	78
3.9 Graf $C_4 \circ S_{1,6}$	79
4.1 Graf Identitas dari Grup $K = \{a, b, c, d, e, f\}$	81
4.2 Subgraf Identitas Khusus untuk $H = \{c, f\}$	82
4.3 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_3$	84
4.4 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_5$	85
4.5 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_7$	85
4.6 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_9$	86
4.7 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_n$ dengan $n$ ganjil untuk $n \geq 3$	86
4.8 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_2$	89
4.9 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_4$	89
4.10 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_6$	90
4.11 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_8$	90
4.12 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_n$ dengan $n$ genap untuk $n \geq 2$	91
4.13 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_{15}$	94

4.14 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_{15}$	94
4.15 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_{16}$	97
4.16 Graf identitas grup $\mathbb{Z}_{15}$	97



## DAFTAR LAMBANG

$a \in A$  :  $x$  anggota A

$H \subseteq G$  : H himpunan bagian dari G

$\mathbb{Z}$  : himpunan semua bilangan bulat

$\mathbb{Z}_n$  : himpunan bilangan bulat modulo n

$\circ$  : operasi korona

$*$  : operasi biner

$\sim$  : ekuivalen

$\equiv$  : kongruen

$\not\equiv$  : tidak kongruen

$\blacksquare$  : akhir suatu bukti

$\square$  : akhir suatu contoh

$\rightarrow$  : menuju

$a | b$  : a membagi habis b

$a \nmid b$  : a tidak membagi habis b

$[a]$  : kelas kongruensi dari a

$\cup$  : gabungan

## INTISARI

### PELABELAN PRIMA PADA HASIL OPERASI KORONA ANTARA GRAF SIKLUS DAN GRAF BINTANG SERTA GRAF IDENTITAS

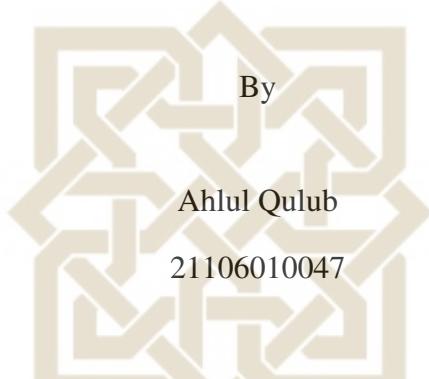


Penelitian ini dilatarbelakangi oleh kekeliruan dalam pembuktian pelabelan prima pada graf  $C_3 \circ S_{1,n}$  dan  $C_4 \circ S_{1,n}$  dalam artikel sebelumnya, yang mendorong perlunya kajian ulang dengan pendekatan pelabelan yang lebih tepat. Pelabelan prima pada graf merupakan pemetaan bijektif dari himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat positif berbeda sedemikian sehingga setiap pasangan simpul yang bertetangga memperoleh label yang saling relatif prima. Penelitian ini membahas pelabelan prima pada graf hasil operasi korona antara graf siklus  $C_3$  dan  $C_4$  dengan graf bintang  $S_{1,n}$ , serta pada struktur graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$ . Metode yang digunakan meliputi konstruksi fungsi pelabelan secara langsung dan pembuktian matematis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf  $C_3 \circ S_{1,n}$  dan  $C_4 \circ S_{1,n}$  memenuhi pelabelan prima untuk  $n \geq 2$ . Selain itu, graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$  juga dapat diberi pelabelan prima baik untuk  $n$  genap maupun ganjil. Temuan ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori pelabelan graf, khususnya dalam konteks graf hasil operasi korona dan struktur graf yang berkaitan dengan grup.

**Kata kunci:** Pelabelan Prima, Graf Siklus, Graf Bintang, Operasi Korona, Graf Identitas, Grup  $\mathbb{Z}_n$ .

## ABSTRACT

### PRIME LABELING OF THE CORONA PRODUCT OF CYCLE AND STAR GRAPHS, AND THE IDENTITY GRAPH



This study is motivated by an error in the proof of prime labeling on the graphs  $C_3 \circ S_{1,n}$  and  $C_4 \circ S_{1,n}$  in a previous article, which prompted the need for a reexamination using a more accurate labeling approach. A prime labeling of a graph is a bijective mapping from the set of vertices to the set of distinct positive integers such that every pair of adjacent vertices receives relatively prime labels. This research discusses prime labeling on corona product graphs formed by cycle graphs  $C_3$  and  $C_4$  with star graphs  $S_{1,n}$ , as well as on the identity graphs of the group  $\mathbb{Z}_n$ . The methods used include direct construction of labeling functions and mathematical proofs based on congruence rules and graph structure. The results show that the graphs  $C_3 \circ S_{1,n}$  and  $C_4 \circ S_{1,n}$  admit prime labelings for  $n \geq 2$ . Additionally, the identity graphs of the group  $\mathbb{Z}_n$  can also be assigned prime labelings for both even and odd values of  $n$ . These findings contribute to the development of graph labeling theory, particularly in the context of corona product graphs and graph structures related to algebraic groups.

**Keywords:** Prime Labeling, Cycle Graph, Star Graph, Corona Product, Identity Graph, Group  $\mathbb{Z}_n$ .

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1. Latar Belakang Masalah

Penelitian ini dilatarbelakangi oleh adanya kekeliruan dalam pembuktian pe-labelan prima pada hasil operasi korona antara graf siklus dan graf bintang dalam artikel Kowsalya & Keerthika (2024). Fungsi bijektif yang digunakan dalam pela-belan tidak selalu menghasilkan pasangan simpul bertetangga yang memiliki label saling relatif prima, sehingga syarat pelabelan prima tidak terpenuhi secara matema-tis. Kekeliruan tersebut mendorong penulis untuk mengkaji ulang pembuktian yang ada, dengan menyusun konstruksi fungsi pelabelan yang memperhatikan keterhu-bungan label dan syarat kongruensi modulo agar memenuhi ketentuan pelabelan prima. Untuk mendukung kajian ini, pemahaman terhadap dasar-dasar teori graf menjadi sangat penting.

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan asal Swiss, melalui sebuah tulisan ilmiah yang membahas permasalahan jembatan Königsberg, sebuah kota di Eropa yang dipisahkan oleh Sungai Pregel dan dihubungkan oleh tujuh jembatan. Permasalahan yang diangkat adalah apakah memungkinkan seseorang berjalan melewati setiap jembatan tepat satu kali tanpa mengulanginya. Dengan memodelkan setiap daratan sebagai simpul dan setiap jembatan sebagai sisi, Euler menyusun dasar awal dari apa yang kini dikenal sebagai teori graf (Weisstein, 2025). Meskipun pada masa itu teori graf belum berkembang secara formal, kontribusi Euler menjadi dasar lahirnya teori graf

modern yang kini telah berkembang pesat dan diaplikasikan di berbagai bidang seperti biokimia, kimia, jaringan komputer, desain sirkuit, dan manajemen basis data (Prathik et al., 2016).

Salah satu cabang dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf adalah suatu pemberian bilangan bulat kepada simpul, sisi, atau keduanya dalam suatu graf, yang dilakukan dengan memenuhi syarat-syarat tertentu (Gallian, 2024). Penelitian ini secara khusus berfokus pada pelabelan simpul, yaitu pelabelan setiap simpul graf ke suatu bilangan bulat positif.

Perkembangan pelabelan graf telah menarik perhatian banyak peneliti sejak kemunculannya. Rosa (1967) memperkenalkan konsep  $\beta$ -*valuation* sebagai bentuk awal pelabelan graf, yang kemudian dipopulerkan oleh Golomb (1972) dengan nama *graceful labeling*. Konsep  $\beta$ -*valuation* ini menjadi fondasi bagi pengembangan berbagai jenis pelabelan graf lainnya, termasuk pelabelan prima. Dalam surveinya yang komprehensif, Gallian (2024) mencatat bahwa hingga saat ini telah terdapat lebih dari 350 jenis pelabelan graf yang dikaji dalam lebih dari 3600 artikel ilmiah.

Penelitian ini secara khusus berfokus pada pelabelan prima pada graf, yang merupakan pemetaan bijektif dari himpunan simpul graf ke himpunan bilangan bulat positif yang berbeda sedemikian sehingga setiap pasangan simpul yang bertetangga memperoleh label yang saling relatif prima, yaitu memiliki faktor persekutuan terbesar (FPB) sama dengan satu (Fu & Huang, 1994). Pelabelan prima menjadi menarik karena sifat matematisnya yang kuat serta memiliki potensi dalam aplikasi kriptografi (Dhanasekar & V, 2024).

Kowsalya & Keerthika (2024), dalam artikelnya yang berjudul “*Prime Labeling of Corona Product of Graphs*” mengkaji pelabelan prima pada hasil operasi korona antara dua jenis graf dasar, yaitu graf siklus dan graf bintang. Operasi ko-

rona antara dua graf  $C_1$  dan  $G_2$  serta dinotasikan dengan  $G_1 \circ G_2$ , yang merupakan suatu operasi yang menghasilkan graf baru dengan menyambungkan setiap simpul graf  $G_1$  ke semua simpul dalam salinan graf  $G_2$  (Frucht & Harary, 1970). Dalam penelitian tersebut, graf  $G_1$  yang digunakan adalah graf siklus  $C_m$ , sedangkan graf  $G_2$  adalah graf bintang  $S_{1,n}$  (graf pohon dengan satu simpul pusat dan  $n$  simpul daun). Kombinasi struktur graf siklus dan bintang melalui operasi korona ini menghasilkan struktur graf yang kompleks, sehingga memiliki potensi signifikan untuk dikaji lebih lanjut dari sisi pelabelan prima.

Selain itu, teori graf juga dapat dikaji berdasarkan struktur aljabar, seperti grup  $\mathbb{Z}_n$ , yaitu himpunan bilangan bulat modulo  $n$  dengan operasi penjumlahan modulo. Grup  $\mathbb{Z}_n$  dapat direpresentasikan dalam bentuk graf identitas, yaitu graf yang menghubungkan setiap elemen grup ke elemen identitas dan elemen lain yang apabila dioperasikan menghasilkan identitas. Penelitian oleh Augustin & Welyyanti (2020) menunjukkan bahwa struktur graf identitas dari grup  $\mathbb{Z}_n$  memiliki pola tertentu yang bergantung pada  $n$  ganjil atau genap. Pada  $n$  ganjil, graf identitas memuat  $\frac{(n-1)}{2}$  buah subgraf lengkap  $K_3$  karena terdapat penjumlahan elemen menghasilkan elemen identitas, sedangkan pada  $n$  genap memuat  $\frac{(n-2)}{2}$  buah subgraf lengkap  $K_3$  dan terdapat tambahan satu subgraf lengkap  $K_2$  karena adanya elemen invers berupa dirinya sendiri. Penggabungan konsep graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$  dan pelabelan prima membuka peluang baru untuk menelaah struktur subgraf yang memiliki pola keterhubungan unik berdasarkan sifat koprimnalitas antar simpul.

Berdasarkan kajian tersebut, pelabelan prima, khususnya dalam konteks pelabelan simpul hasil dari operasi korona antara graf siklus dan graf bintang merupakan topik yang menarik dan signifikan untuk dikaji lebih lanjut. Operasi korona menghasilkan struktur graf yang lebih kompleks, yang membuka peluang pengem-

bangun pendekatan pelabelan baru dengan memperhatikan keterhubungan label dan syarat kongruensi modulo. Selain itu, keterkaitan antara konsep pelabelan prima dan graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$  menunjukkan adanya hubungan antara teori graf, struktur aljabar, dan teori bilangan. Melalui pendekatan ini, penulis berharap penelitian ini dapat memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai penerapan konsep-konsep tersebut dalam pengembangan teori graf, khususnya dalam konteks pelabelan graf.

## 1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada tugas akhir ini adalah mencari pelabelan prima pada graf  $C_3 \circ S_{1,n}$  dan  $C_4 \circ S_{1,n}$ , untuk  $n \geq 2$ . Sedangkan pelabelan prima pada graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$  hanya untuk  $n = 15$  dan  $n = 16$ .

## 1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep hasil operasi korona antara graf siklus  $C_m$  dan graf bintang  $S_{1,n}$ ?
2. Bagaimana pelabelan prima pada graf  $C_3 \circ S_{1,n}$  dan  $C_4 \circ S_{1,n}$ , untuk  $n \geq 2$ ?
3. Bagaimana pelabelan prima pada struktur graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$  untuk  $n$  ganjil dan  $n$  genap yang ditinjau dari jumlah subgraf lengkap  $K_3$  dan  $K_2$ ?

## 1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari konsep hasil operasi korona antara graf siklus  $C_m$  dan graf bintang

tang  $S_{1,n}$ .

2. Menyusun pelabelan prima pada graf  $C_3 \circ S_{1,n}$  dan  $C_4 \circ S_{1,n}$ , untuk  $n \geq 2$ .
3. Menyusun pelabelan prima pada struktur graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$  untuk  $n$  ganjil dan  $n$  genap yang ditinjau dari jumlah subgraf lengkap  $K_3$  dan  $K_2$ .

### 1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman tentang konsep hasil operasi korona antara graf silsilah  $C_m$  dan graf bintang  $S_{1,n}$ .
2. Memberikan pemahaman tentang pelabelan prima pada graf  $C_3 \circ S_{1,n}$  dan  $C_4 \circ S_{1,n}$ , untuk  $n \geq 2$ .
3. Memberikan pemahaman tentang pelabelan prima pada struktur graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$  untuk  $n$  ganjil dan  $n$  genap yang ditinjau dari jumlah subgraf lengkap  $K_3$  dan  $K_2$ .

### 1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan skripsi ini bersumber dari buku, makalah, artikel, dan skripsi.

1. Buku karya Munandar, 2022 dengan judul "**Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf**" membahas tentang pengantar matematika diskrit dan teori graf.
2. Artikel karya Kowsalya & Keerthika, 2024 dengan judul "**Prime Labeling of Corona Product of Graphs**" membahas pelabelan prima pada hasil operasi

korona antara graf siklus dan graf bintang. Dalam penelitian tersebut, diberikan konstruksi pelabelan untuk graf  $C_3 \circ S_{1,n}$  dan  $C_4 \circ S_{1,n}$  dengan tujuan setiap pasangan simpul bertetangga memiliki label yang saling relatif prima. Persamaan dengan skripsi ini terletak pada objek kajian, yaitu sama-sama membahas pelabelan prima pada graf  $C_3 \circ S_{1,n}$  dan  $C_4 \circ S_{1,n}$ . Namun, terdapat perbedaan, yaitu pada artikel tersebut ditemukan kekeliruan dalam pembuktian karena fungsi pelabelan yang digunakan tidak selalu menjamin terpenuhinya syarat pelabelan prima. Oleh karena itu, skripsi ini disusun sebagai penyempurnaan, dengan membangun kembali konstruksi fungsi pelabelan yang lebih tepat melalui pendekatan keterhubungan label dan syarat kongruensi modulo, sehingga pelabelan yang dihasilkan memenuhi ketentuan pelabelan prima secara valid.

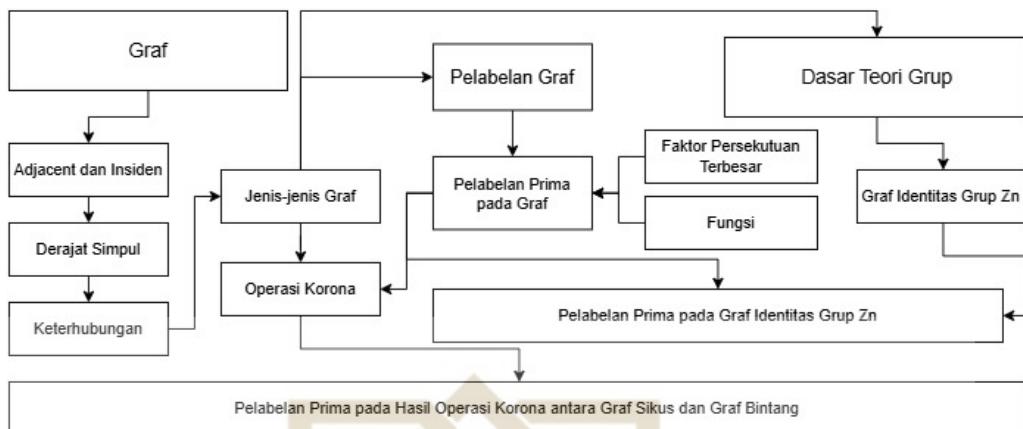
3. Artikel karya Prabagaran & Rajendran, 2022 yang berjudul "***Generation of Prime Labeled Trees through Corona Product***" membahas konstruksi graf pohon baru yang memenuhi pelabelan prima dengan memanfaatkan operasi korona antara pohon yang telah diberi pelabelan prima dengan graf lengkap berordo satu, yaitu  $K_1$ . Persamaannya dengan skripsi ini terletak pada penggunaan operasi korona sebagai pendekatan utama dalam membentuk graf baru yang dapat diberi pelabelan prima. Namun, artikel tersebut terbatas pada struktur pohon dan tidak mengkaji jenis graf lain seperti graf siklus atau graf identitas. Perbedaan utamanya adalah skripsi ini memperluas kajian pelabelan prima pada hasil operasi korona antara graf siklus dan graf bintang, sehingga memberikan kontribusi lebih lanjut dalam eksplorasi pelabelan prima pada struktur graf non-pohon.
4. Artikel karya Augustin & Welyyanti, 2020 yang berjudul "***Grup  $\mathbb{Z}_n$  dalam***

**Bentuk Graf Identitas**” membahas representasi graf identitas dari grup  $\mathbb{Z}_n$  serta pola struktur graf yang terbentuk berdasarkan nilai  $n$  ganjil maupun genap. Persamaannya dengan skripsi ini adalah pada objek yang dikaji, yaitu graf identitas dari grup  $\mathbb{Z}_n$ . Namun, artikel tersebut hanya fokus pada struktur graf tanpa membahas pelabelan. Perbedaan utamanya adalah skripsi ini melanjutkan kajian tersebut dengan menerapkan pelabelan prima pada graf identitas tersebut, sehingga memberikan kontribusi tambahan dalam hal keterkaitan antara teori graf dan struktur aljabar melalui konsep koprimnalitas.

### 1.7. Metode Penelitian

Penelitian ini penulis menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi dan artikel-artikel terkait topik penelitian yaitu; konsep dasar graf, faktor persekutuan terbesar, fungsi, dasar teori grup, pelabelan graf, pelabelan prima pada graf, operasi korona, pelabelan prima pada hasil operasi korona antara graf siklus dan graf bintang, dan pelabelan prima pada graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$ . Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

1. Membahas konsep dasar dari graf.
2. Membahas konsep dasar faktor persekutuan terbesar, fungsi, dan dasar teori grup.
3. Membahas pelabelan graf dan pelabelan prima pada graf.
4. Membahas operasi korona.
5. Membahas pelabelan prima pada hasil korona antara graf siklus dan graf bintang.
6. Membahas pelabelan prima pada graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$ .



**Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian**

## 1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi lima bab, yaitu sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas tentang konsep dasar graf, faktor persekutuan terbesar, fungsi, dasar teori grup, pelabelan graf, dan pelabelan prima pada graf.
- BAB 3** : Bab ini membahas pelabelan prima pada hasil operasi korona antara graf siklus dan graf bintang.
- BAB 4** : Bab ini membahas pelabelan prima pada graf identitas grup  $\mathbb{Z}_n$ .
- BAB 5** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

## BAB V

## PENUTUP

Bab penutup ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

### 5.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Operasi korona antara graf siklus  $C_m$  dan graf bintang  $S_{1,n}$ , yang dinotasikan dengan  $C_m \circ S_{1,n}$ , merupakan suatu konstruksi graf gabungan yang menghasilkan struktur kompleks. Operasi ini dilakukan dengan menyambungkan setiap simpul pada  $C_m$  ke seluruh simpul dalam salinan terpisah dari graf  $S_{1,n}$ , sehingga membentuk  $m$  salinan dari  $S_{1,n}$  yang masing-masing terhubung pada satu simpul dari  $C_m$  serta operasi ini memiliki total simpul  $m \cdot (n + 2)$ .
2. Pada penelitian ini, telah dibuktikan bahwa graf  $C_3 \circ S_{1,n}$  dan  $C_4 \circ S_{1,n}$  memenuhi pelabelan prima untuk  $n \geq 2$ . Pembuktian dilakukan melalui konstruksi fungsi pelabelan dengan memperhatikan aturan rotasi dan syarat kongruensi modulo agar setiap pasangan simpul yang bertetangga memperoleh label saling relatif prima.
3. Graf identitas dari grup  $\mathbb{Z}_n$  memenuhi pelabelan prima baik untuk  $n$  ganjil maupun genap. Untuk  $n$  ganjil, graf identitas terdiri dari  $\frac{n-1}{2}$  buah subgraf lengkap  $K_3$  yang terbentuk dari penjumlahan elemen yang menghasilkan

an identitas, sebagaimana ditunjukkan pada contoh graf identitas grup  $\mathbb{Z}_{15}$  yang memiliki tujuh subgraf lengkap  $K_3$ . Adapun untuk  $n$  genap, graf identitas memuat  $\frac{n-2}{2}$  buah subgraf lengkap  $K_3$  yang terbentuk dari penjumlahan elemen yang menghasilkan identitas dan satu subgraf lengkap  $K_2$  yang terbentuk dari elemen yang merupakan invers dirinya sendiri, seperti pada contoh graf identitas grup  $\mathbb{Z}_{16}$  yang memiliki tujuh subgraf lengkap  $K_3$  dan satu subgraf lengkap  $K_2$ .

## 5.2. Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, penulis menyampaikan beberapa saran berikut yang dapat menjadi acuan untuk pengembangan penelitian selanjutnya:

1. Penelitian ini hanya membahas pelabelan prima pada graf hasil operasi korona antara graf siklus  $C_m$  dan graf bintang  $S_{1,n}$  dengan  $m = 3$  dan  $4$  untuk  $n \geq 2$ . Oleh karena itu, penelitian lebih lanjut dapat memperluas kajian pada nilai  $m$  yang lebih besar atau pada jenis graf lain seperti graf lintasan, graf roda, atau graf lengkap.
2. Kajian pelabelan prima dalam penelitian ini masih terbatas pada pelabelan simpul. Untuk pengembangan selanjutnya, dapat dilakukan perluasan kajian terhadap pelabelan sisi maupun pelabelan total pada graf hasil operasi korona untuk melihat kemungkinan pola dan sifat baru yang muncul.
3. Untuk memperoleh hasil yang lebih akurat, verifikasi kebenaran pelabelan prima pada graf hasil operasi korona sebaiknya dilakukan dengan bantuan komputer, misalnya menggunakan pemrograman Python untuk meminimalisasi kemungkinan kesalahan perhitungan manual.

## DAFTAR PUSTAKA

- Augustin, E. & Welyyanti, D. (2020). Grup  $\mathbb{Z}_n$  dalam bentuk graf identitas. *Jurnal Matematika UNAND*, 9:1–7.
- Burton, D. M. (1980). *Elementary Number Theory*. Boston: Allyn and Bacon.
- Chen, W. W. L. (2008). Discrete mathematics. <https://www.williamchen-mathematics.info/lndmfolder/lndm.html>? Lecture notes for MATH237, Macquarie University.
- Dhanasekar, M. & V, K. (2024). Application of graceful labeling in cryptography. In Conference Paper. [https://www.researchgate.net/publication/386510319\\_Application\\_of\\_Graceful\\_labeling\\_in\\_Cryptography](https://www.researchgate.net/publication/386510319_Application_of_Graceful_labeling_in_Cryptography). Available at ResearchGate, accessed June 2025.
- Dummit, D. S. & Foote, R. M. (1991). *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Frucht, R. & Harary, F. (1970). On the corona of two graphs. *Aequationes Mathematicae*, 4:322–325, DOI: 10.1007/BF01844162.
- Fu, H. & Huang, K. (1994). On prime labellings. *Discrete Mathematics*, 127(1–3):181–186, DOI: 10.1016/0012-365X(92)00477-9.
- Gallian, J. A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra*. Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, CA, 7th edition, ISBN: 978-0-547-16509-7.

- Gallian, J. A. (2024). A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Surveys*, DS6, <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/ds6>. 27th edition.
- Golomb, S. W. (1972). Graph labeling and coding. In Reynolds, F. & Wilson, B., editors, *Graph Theory and Computing*, pages 37–48. Academic Press.
- Kandasamy, W. B. V. & Smarandache, F. (2009). *Groups as Graphs*. Editura CuArt, Romania, ISBN: 978-1-59973-093-6.
- Kowsalya, V. & Keerthika, M. (2024). Prime labeling of corona product of graphs. *Indian Journal of Natural Sciences*, 14:67284–67287.
- Munandar, A. (2022). *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*. Sleman : Deepublish (CV Budi Utama).
- Prabagaran, J. & Rajendran, K. (2022). Generation of prime labeled trees through corona product. *International Journal of Creative Research Thoughts (IJCRT)*, 10(10):c317–c321, ISSN: 2320-2882, <https://www.ijcrt.org/papers/IJCRT2210271.pdf>. IJCRT2210271.
- Prasetyo, P. W., Isnaini, U., Nurnugroho, B. A., & Prahmana, R. C. I. (2020). *Elementary Number Theory*. Universitas Ahmad Dahlan Press, Yogyakarta.
- Prathik, A., Uma, K., & Anuradha, J. (2016). An overview of application of graph theory. *International Journal of ChemTech Research*, 9(2):242–248, ISSN: 0974-4290.
- Rosa, A. (1967). On certain valuations of the vertices of a graph. In *Theory of Graphs, International Symposium, Rome, July 1966*, pages 349–355. Gordon and Breach, New York and Dunod, Paris.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, 7th edition, ISBN: 978-0-07-338309-5.

Weisstein, E. W. (2025). Koenigsberg bridge problem. <https://mathworld.wolfram.com/KoenigsbergBridgeProblem.html>.  
From MathWorld—A Wolfram Web Resource.

