SKRIPSI

GRUP SOLVABEL DAN TEORI GALOIS SERTA APLIKASINYA DALAM PEMBUKTIAN PENYELESAIAN POLINOMIAL DENGAN RADIKAL

SOFYAN TIO FAJAR MAULANA
21104040061

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

2025

GRUP SOLVABEL DAN TEORI GALOIS SERTA APLIKASINYA DALAM PEMBUKTIAN PENYELESAIAN POLINOMIAL DENGAN RADIKAL

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Pendidikan Matematika

Diajukan oleh:
SOFYAN TIO FAJAR MAULANA
21104040061

Kepada

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2025

HALAMAN PENGESAHAN

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 513056 Fax. (0274) 586117 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-3815/Un.02/DT/PP.00.9/12/2025

Tugas Akhir dengan judul : GRUP SOLVABEL DAN TEORI GALOIS SERTA APLIKASINYA DALAM PEMBUKTIAN PENYELESAIAN POLINOMIAL DENGAN RADIKAL

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : SOFYAN TIO FAJAR MAULANA
Nomor Induk Mahasiswa : 21104040061
Telah diujikan pada : Selasa, 16 Desember 2025
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Wed Giyarti, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 69426800a1ecc

Penguji I

Dr. Iwan Kuswidi, S.Pd. I., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 6943bf0fb5a93

Penguji II

Burhanuddin Latif, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 69424331077e6

Yogyakarta, 16 Desember 2025
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan

Prof. Dr. Sigit Purnama, S.Pd.I., M.Pd.
SIGNED

Valid ID: 6944b7081a787

1/1 19/12/2025

SURAT PERSETUJUAN TUGAS AKHIR

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-04/R0

HALAMAN PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
Di Yogyakarta

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	:	Sofyan Tio Fajar Maulana
NIM	:	21104040061
Judul Skripsi	:	Grup Solvabel dan Teori Galois serta Aplikasinya dalam Pembuktian Penyelesaian Polinomial dengan Radikal

Sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Pendidikan Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera di munaqosyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Yogyakarta, 5 Desember 2025
Pembimbing

Wed Giyarti, M.Si.
NIP. 19850322 202012 2 003

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Sofyan Tio Fajar Maulana
NIM	: 21104040061
Program Studi	: Pendidikan Matematika
Fakultas	: Ilmu Tarbiyah dan Keguruan

Menyatakan dengan sesungguhnya, bahwa skripsi saya yang berjudul "Grup Solvabel dan Teori Galois serta Aplikasinya dalam Pembuktian Penyelesaian Polinomial dengan Radikal" adalah hasil karya pribadi dan sepanjang pengetahuan penyusun tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis orang lain, kecuali bagian-bagian tertentu yang penyusun ambil sebagai acuan dengan mengikuti penulisan ilmiah yang lazim.

Yogyakarta, 5 Desember 2025
Penulis

METERAI TEMPEL
10000 SEPULUH RIBU RUPIAH
B14EANX141139774

Sofyan Tio Fajar Maulana
NIM. 21104040061

GRUP SOLVABEL DAN TEORI GALOIS SERTA APLIKASINYA DALAM PEMBUKTIAN PENYELESAIAN POLINOMIAL DENGAN RADIKAL

Sofyan Tio Fajar Maulana
21104040061

ABSTRAK

Pencarian formula umum untuk menentukan akar-akar persamaan polinomial merupakan salah satu persoalan klasik dan fundamental dalam sejarah aljabar. Formula penyelesaian menggunakan operasi aritmetika dan penarikan akar (radikal) telah berhasil ditemukan untuk polinomial berderajat dua, tiga, dan empat, namun upaya serupa untuk polinomial berderajat lima atau lebih mengalami kegagalan. Penelitian ini bertujuan untuk memberikan eksposisi matematis yang sistematis mengenai fenomena tersebut dengan menyintesiskan konsep grup solvabel dan teori Galois. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur terhadap teks-teks fundamental dalam aljabar abstrak. Penelitian diawali dengan menganalisis struktur deret turunan pada grup simetri S_n, yang membuktikan bahwa S_n bersifat solvabel untuk $n \leq 4$ namun tidak solvabel untuk $n \geq 5$ akibat sifat kesederhanaan grup alternating A_n. Selanjutnya, dibangun Teorema Fundamental Teori Galois yang menetapkan korespondensi bijektif pembalik inklusi antara sublapangan dari suatu perluasan Galois dengan subgrup dari grup Galois-nya. Hasil penelitian memuncak pada pembuktian Teorema Utama Kesolvabelan, yang menyatakan bahwa sebuah polinomial dapat diselesaikan jika dan hanya jika grup Galois yang berkorespondensi dengannya adalah grup solvabel. Penerapan teorema ini pada polinomial umum membuktikan Teorema Abel-Ruffini, yaitu ketidakmungkinan adanya formula radikal umum untuk polinomial berderajat lima atau lebih, sekaligus menyediakan kriteria untuk mengidentifikasi polinomial spesifik derajat tinggi yang dapat diselesaikan.

Kata Kunci: Grup Solvabel, Teori Galois, Penyelesaian dengan Radikal, Teorema Abel-Ruffini, Grup Simetri

SOLVABLE GROUPS AND GALOIS THEORY AND THEIR APPLICATION IN PROVING THE SOLVABILITY OF POLYNOMIALS BY RADICALS

Sofyan Tio Fajar Maulana
21104040061

ABSTRACT

The search for a general formula to determine the roots of polynomial equations is one of the classic and fundamental problems in history of algebra. Solution formulas using arithmetic operations and root extraction (radicals) have been successfully found for polynomials of degree two, three, and four, but similar attempts for polynomials of degree five or higher have proven unsuccessful. This study aims to provide a systematic mathematical exposition of this phenomenon by synthesizing the concepts of solvable groups and Galois theory. The method used in this research is a literature study of fundamental texts in abstract algebra. The study begins by analyzing the structure of the derived series of the symmetric group S_n, proving that S_n is solvable for $n \leq 4$ but becomes non-solvable for $n \geq 5$ due to the simplicity of the alternating group A_n. Furthermore, the Fundamental Theorem of Galois Theory is constructed, establishing an inclusion-reserving bijective correspondence between the subfields of a Galois extension and the subgroups of its Galois group. The results culminate in the proof of the Main Theorem of Solvability, which states that a polynomial is solvable by radicals if and only if its corresponding Galois group is a solvable group. The application of this theorem to general polynomials establishes the Abel-Ruffini Theorem, namely the impossibility of a general radical formula for polynomials of degree five or higher, while also providing the criteria for identifying specific high-degree polynomials that remain solvable.

Keywords: Solvable Groups; Galois Theory; Solvability by Radicals; Abel-Ruffini Theorem, Symmetric Groups.

MOTTO

Wir müssen wissen.
Wir werden wissen.

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan kepada:

Bapak Totok Isjiyanto dan Ibu Siti Sularsih, kedua orang tua saya tercinta.

Kepada Faiz Zaidan Ghifari, adik saya.

serta kepada:

Almamaterku

Program Studi Pendidikan Matematika

Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Grup Solvabel dan Teori Galois serta Aplikasinya dalam Pembuktian Penyelesaian Polinomial dengan Radikal**" dengan baik. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurah kepada Rasulullah Muhammad SAW. Skripsi ini dapat diselesaikan berkat bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Sigit Purnama, S.Pd.I., M.Pd., selaku Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Bapak Burhanuddin Latif, M.Si., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika sekaligus Dosen Pembimbing Akademik.
3. Ibu Wed Giyarti, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Skripsi yang telah memberikan ilmu, membimbing, dan mengarahkan dengan penuh keikhlasan.
4. Seluruh Bapak/Ibu Dosen Program Studi Pendidikan Matematika yang selama ini telah memberikan ilmu yang bermanfaat kepada penulis.
5. Kedua orang tua saya tercinta, Bapak Totok Isjiyanto dan Ibu Siti Sularsih. Terima kasih atas pengorbanan, doa tulus, dan mengusahakan segala yang penulis butuhkan dalam menempuh pendidikan. Kepada adik saya, Faiz Zaidan Ghifari yang sudah memberi semangat dan kebahagiaan terbaik.
6. Kepada salah satu mahasiswa dengan NIM 21104070047. Terima kasih karena selalu ada dan tak henti memberikan semangat, dukungan, serta bantuan baik tenaga, pikiran, maupun moral kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, dengan penuh kerendahan hati, peneliti sangat terbuka terhadap segala bentuk masukan, kritik, dan saran yang bersifat membangun. Semoga setiap bagian dari skripsi ini dapat memberikan manfaat.

Yogyakarta, 5 Desember 2025
Penulis

Sofyan Tio Fajar Maulana
21104040061

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{Z}$	:	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Q}$	:	Himpunan bilangan rasional
$\mathbb{R}$	:	Himpunan bilangan riil
$\mathbb{C}$	:	Himpunan bilangan kompleks
$\emptyset$	:	Himpunan kosong
$\in$	:	Elemen dari (anggota himpunan)
$\notin$	:	Bukan elemen dari
$\subseteq$	:	Himpunan bagian (*subset*)
$\subset$	:	Himpunan bagian sejati (*proper subset*)
$\cap$	:	Irisan himpunan
$\cup$	:	Gabungan himpunan
$n!$	:	Faktorial dari n
G, H, N	:	Grup
e	:	Elemen identitas grup
a^{-1}	:	Invers dari elemen a
$H \leq G$	:	H adalah subgrup dari G
$N \trianglelefteq G$	:	N adalah subgrup normal dari G
G/N	:	Grup faktor dari G oleh N
$[G:H]$	:	Indeks subgrup H dalam G
$\cong$	:	Isomorfisma antar grup

ϕ, ψ	:	Homomorfisma grup
$\ker(\phi)$	:	Kernel dari homomorfisma ϕ
$\mathrm{im}(\phi)$	:	*Image* (citra) dari homomorfisma ϕ
S_n	:	Grup simetri berderajat n (grup permutasi)
A_n	:	Grup alternating berderajat n
D_n	:	Grup dihedral berderajat n
V_4	:	Grup Klein-4
QD_{16}	:	Grup quasidihedral berorder 16
$\mathbb{Z}_n$	:	Grup integer modulo n
$[x, y]$	:	Komutator dari elemen x dan y ($xyx^{-1}y^{-1}$)
G' atau $[G, G]$	:	Subgrup komutator dari G
$G^{(k)}$	:	Subgrup turunan ke-k dari G
$Z(G)$	:	Pusat (*center*) dari grup G
R	:	Ring
F, K, L, E	:	Lapangan (*Field*)
$F^{\times}$	:	Grup multiplikatif dari elemen tak-nol di F
$F[x]$	:	Ring polinomial dengan koefisien di F
K/F	:	Perluasan lapangan K atas F
$[K:F]$	:	Derajat perluasan lapangan K atas F
$F(\alpha)$	:	Perluasan lapangan yang dibangkitkan oleh α atas F
$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$	:	Lapangan pemisah atau perluasan yang dibangkitkan oleh α_i
ζ_n atau ζ	:	Akar kesatuan ke-n (*primitive* n*-th root of unity*)

$\mathrm{Aut}(K)$	:	Grup automorfisma dari lapangan K
$\mathrm{Gal}(K/F)$	:	Grup Galois dari perluasan K/F
K_H	:	Lapangan tetap dari subgrup H
K_G atau F_G	:	Lapangan tetap dari grup G
σ, τ	:	Automorfisma (elemen grup Galois)
$\mathcal{E}$	:	Himpunan semua sublapangan perantara
$\mathcal{H}$	:	Himpunan semua subgrup dari grup Galois
(α, ζ)	:	Resolven Lagrange
$s_1, \dots, s_n$	:	Fungsi simetris elementer
$t_1, \dots, t_n$	:	Variabel tak tentu (akar-akar)
$\blacksquare$	:	*Quod Erat Demonstrandum* (Akhir Pembuktian)

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Pencarian solusi eksak untuk persamaan aljabar merupakan salah satu persoalan fundamental dan klasik dalam matematika. Sejak era Renaisans, telah berhasil ditemukan formula umum untuk mengekspresikan akar-akar persamaan polinomial dalam bentuk radikal, yaitu melalui operasi aritmetika dasar dan penarikan akar terhadap koefisiennya. Keberhasilan ini mencakup formula untuk polinomial berderajat dua (kuadratik), berderajat tiga (kubik), dan berderajat empat (kuartik) yang mengindikasikan bahwa metode penyelesaian semacam itu tampak dapat digeneralisasi ke semua derajat polinomial (Stewart, 2015).

Namun, upaya untuk menemukan formula radikal serupa untuk polinomial berderajat lima (kuintik) menghadapi kendala teoretis yang fundamental. Selama lebih dari dua abad, para matematikawan tidak berhasil menemukan formula umum yang menandakan bahwa persoalan ini mungkin tidak dapat diselesaikan dengan metode yang ada. Kegagalan ini mengisyaratkan adanya perbedaan struktural yang mendasar antara polinomial berderajat rendah dan polinomial berderajat tinggi (Rotman, 1998).

Titik balik konseptual terjadi pada akhir abad ke-18 melalui karya Joseph-Louis Lagrange. Lagrange mengalihkan fokus dari upaya menemukan solusi baru ke analisis terhadap struktur solusi yang telah ada. Lagrange mengamati bahwa kunci dari metode penyelesaian terletak pada perilaku permutasi dari akar-akar polinomial. Analisis Lagrange ini menjadi fondasi awal yang menghubungkan teori persamaan dengan struktur simetri yang kemudian menjadi inti dari teori grup (Rotman, 1998).

Jawaban definitif atas persoalan kuintik diberikan pada awal abad ke-19. Niels Henrik Abel pada tahun 1824 memberikan bukti formal pertama yang menunjukkan bahwa formula radikal umum untuk polinomial berderajat lima tidak ada. Namun, hasil Abel ini belum menjelaskan kondisi yang membedakan polinomial yang dapat dan tidak dapat diselesaikan dengan radikal (Stewart, 2015). Penjelasan fundamental tersebut datang dari Évariste Galois yang memperkenalkan pendekatan revolusioner dengan mengasosiasikan setiap polinomial dengan sebuah struktur aljabar unik yang kini dikenal sebagai grup Galois. Galois menunjukkan bahwa kesolvabelan polinomial oleh radikal ditentukan sepenuhnya oleh sifat-sifat dari grup Galois yang berkorespondensi dengannya (Dummit & Foote, 2004).

Kunci dari teori Galois terletak pada sebuah jenis grup spesifik yang disebut grup solvabel. Secara konseptual, sebuah grup disebut solvabel jika grup tersebut dapat diuraikan menjadi serangkaian subgrup normal di mana setiap grup faktor dari dekomposisi tersebut adalah grup abelian (Dummit & Foote, 2004). Struktur hierarkis ini mencerminkan proses penyelesaian persamaan dengan radikal yang juga merupakan proses bertahap. Galois menemukan bahwa proses aljabar dari penarikan akar ini berkorespondensi secara eksak dengan dekomposisi struktural dari grup Galois-nya menjadi komponen-komponen abelian.

Signifikansi konseptual dari grup solvabel dan teori Galois meluas hingga menjadi pilar fundamental dalam cabang matematika lain, khususnya dalam melandasi perkembangan teori bilangan aljabar dan geometri aljabar. Lebih jauh lagi, konsep simetri dan struktur dekomposisi yang diusungnya juga memiliki relevansi teoretis yang kuat dalam bidang lain seperti fisika dan ilmu komputer. Oleh karena itu, penyelidikan mendalam terhadap grup solvabel menjadi esensial untuk memahami struktur fundamental dalam aljabar modern.

Meskipun teori Galois merupakan pilar dalam aljabar modern dan penelitian mengenai grup solvabel telah dilakukan di Indonesia, masih terdapat celah penelitian yang signifikan. Penelitian sebelumnya, seperti oleh Sari (2019) telah membahas sifat-sifat teoretis dari grup solvabel secara mendalam. Penelitian lain oleh Alfianti (2017) telah mengeksplorasi penerapan grup solvabel dalam domain yang berbeda yaitu kriptografi. Kedua penelitian tersebut memberikan fondasi yang kuat namun tidak berfokus pada aplikasi klasik teori Galois dalam pembuktian kesolvabelan polinomial.

Dengan adanya celah tersebut, penelitian ini memiliki posisi yang jelas. Fokus dari penelitian ini adalah melakukan sebuah sintesis teoretis dengan menyajikan alur pembuktian yang utuh dan mandiri. Alur ini secara eksplisit akan menghubungkan konsep grup solvabel dari teori grup dengan aplikasi fundamentalnya dalam teori Galois untuk memecahkan kesolvabelan polinomial. Dengan demikian, penelitian ini secara spesifik membangun jembatan yang seringkali hanya diasumsikan atau dijelaskan secara terpisah dalam literatur lain dan bertujuan untuk memberikan sebuah eksposisi matematis yang sistematis mengenai salah satu pembuktian paling fundamental dalam sejarah aljabar.

1.2. Batasan Masalah

Penelitian ini memiliki batasan yang jelas untuk menjaga agar pembahasan tetap fokus dan mendalam. Penelitian ini merupakan studi literatur murni di bidang aljabar abstrak, yang berarti tidak akan melibatkan pengembangan teori baru atau metode komputasi. Objek kajian utama difokuskan pada tiga konsep inti yaitu grup solvabel, perluasan radikal, dan grup Galois. Penelitian ini membatasi diri pada dua pendekatan penyajian. Pertama, penulis melakukan sintesis terhadap konsep-konsep prasyarat meliputi definisi, lemma, dan teorema yang relevan dari berbagai literatur guna membangun landasan teoretis yang koheren untuk pembuktian utama. Kedua, penelitian ini akan mengelaborasi langkah-langkah pembuktian yang seringkali dipersingkat atau diasumsikan jelas (*trivial*) dalam literatur sumber. Penulis akan menyajikan alur deduksi secara eksplisit, rinci, dan mandiri untuk mengisi celah-celah logika tersebut guna menjamin keutuhan dan kejelasan pembuktian. Lebih lanjut, seluruh pembahasan teoretis akan dikerjakan dalam konteks lapangan dengan karakteristik nol yang merupakan kerangka kerja standar untuk teori Galois klasik.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan judul dan latar belakang yang telah diuraikan, penelitian ini akan menjawab beberapa pertanyaan mendasar berikut.

1. Bagaimana konsep dasar dan sifat-sifat dari grup solvabel?
2. Bagaimana teori Galois membangun hubungan antara perluasan lapangan dan grup Galois?

3. Bagaimana konstruksi teorema utama yang menghubungkan struktur grup solvabel dengan penyelesaian polinomial dengan radikal?
4. Bagaimana aplikasi teori tersebut dalam pembuktian penyelesaian polinomial dengan radikal ditinjau dari derajatnya?

1.4. Tujuan Penelitian

Sejalan dengan rumusan masalah, tujuan yang ingin dicapai melalui penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkaji konsep dasar dan sifat-sifat dari grup solvabel.
2. Mempelajari konstruksi teori Galois yang menghubungkan perluasan lapangan dan grup Galois.
3. Menguraikan konstruksi teorema utama yang mengaitkan sifat grup solvabel dengan penyelesaian polinomial dengan radikal.
4. Menerapkan teori tersebut dalam pembuktian penyelesaian polinomial dengan radikal ditinjau dari derajatnya.

1.5. Manfaat Penelitian

Melalui pencapaian tujuan tersebut, penelitian ini diharapkan dapat memberikan beberapa manfaat berikut.

1. Menyediakan referensi akademis berbahasa Indonesia yang mendalam mengenai aplikasi teori Galois khususnya tentang hubungan antara grup solvabel dan penyelesaian polinomial dengan radikal.
2. Bagi penulis, penelitian ini bermanfaat untuk memperdalam pemahaman konseptual dalam bidang aljabar abstrak serta memenuhi salah satu syarat kelulusan akademik.

1.6. Tinjauan Pustaka

Penelitian ini merupakan studi literatur yang merujuk pada beberapa teks fundamental dalam bidang aljabar abstrak. Dummit dan Foote (2004) dalam *Abstract Algebra* dan Rotman (1998) dalam *Galois Theory* menjadi referensi primer karena tingkat formalitas dan kedalaman matematis yang disajikannya. Kedua buku ini menyediakan landasan yang sangat rigor untuk teori grup, teori lapangan, dan teori Galois. Sementara itu, Stewart (2015) dalam *Galois Theory* akan digunakan sebagai referensi pendukung untuk mendapatkan konteks historis dan pendekatan yang lebih intuitif, yang membantu dalam pemahaman motivasi di balik konsep-konsep abstrak.

Beberapa penelitian serupa telah dilakukan dalam lingkup akademis di Indonesia. Sari (2019) dalam skripsinya di Universitas Andalas mengkaji secara mendalam mengenai *Sifat-Sifat Grup Solvable*. Penelitian tersebut berfokus pada eksplorasi teoretis dari definisi, teorema, dan contoh-contoh yang berkaitan dengan struktur grup solvabel itu sendiri. Sementara itu, Alfianti (2017) dari UIN Sunan Kalijaga membahas *Grup Solvable dan Penerapannya dalam Kriptografi* yang mengarahkan konsep grup solvabel ke aplikasi modern di bidang keamanan informasi.

Penelitian ini memiliki posisi yang berbeda dari kedua penelitian tersebut. Jika penelitian Sari (2019) berhenti pada kajian teoretis, sementara Alfianti (2017) membahas aplikasi kriptografi. Berbeda dengan keduanya, penelitian ini akan menjembatani konsep grup solvabel dengan aplikasi klasik dan fundamentalnya dalam teori Galois. Posisi penelitian ini menjadi unik karena berfokus pada penyajian sebuah sintesis teoretis utuh yang secara eksplisit membangun alur pembuktian dari sifat-sifat grup solvabel hingga aplikasinya dalam teori Galois, sebuah pendekatan yang seringkali tidak disajikan secara lengkap dalam banyak literatur pengantar.

1.7. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur atau kajian pustaka yang mencakup beberapa langkah berikut.

1. Melakukan pengumpulan sumber pustaka relevan yang meliputi buku teks, jurnal, dan skripsi yang membahas tiga bidang utama yaitu teori grup dengan fokus pada grup solvabel, teori lapangan, dan teori Galois.
2. Mengkaji dan mensintesis konsep-konsep seperti definisi, lemma, dan teorema prasyarat yang dibutuhkan untuk pembahasan utama.
3. Peneliti merekonstruksi pembuktian matematika dengan cara menguraikan dan melengkapi langkah-langkah yang seringkali disajikan secara ringkas dalam literatur menjadi argumen deduktif yang eksplisit dan rinci.
4. Menganalisis secara mendalam struktur logis dari pembuktian Teorema Fundamental Teori Galois yang menjadi fokus penelitian.
5. Menyusun kembali seluruh hasil kajian dan analisis ke dalam sebuah naskah skripsi yang sistematis, logis, dan koheren.

1.8. Sistematika Penulisan

Penelitian ini akan disajikan dalam enam bab dengan sistematika sebagai berikut.

1. Bab I Pendahuluan

   Bab ini berisi latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, serta sistematika penulisan.

2. Bab II Landasan Teori

   Bab ini menyajikan definisi, teorema, dan konsep-konsep prasyarat dari teori grup dan teori lapangan yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya.

3. Bab III Grup Solvabel

   Bab ini akan fokus membahas pilar teoretis pertama yaitu konsep grup solvabel secara mendalam, termasuk definisi, sifat-sifat, serta analisis kesolvabelan grup simetri S_n.

4. Bab IV Teori Galois

   Bab ini akan membangun pilar teoretis kedua dengan membahas konstruksi teori Galois meliputi grup Galois, perluasan Galois, dan Teorema Fundamental Teori Galois.

5. Bab V Aplikasi Teori Galois pada Kesolvabelan Polinomial

   Bab ini merupakan puncak penelitian yang menyatukan kedua pilar sebelumnya untuk menyajikan pembuktian teorema utama, serta aplikasinya untuk menunjukkan keberhasilan penyelesaian polinomial berderajat dua, tiga, dan empat; kegagalan umum untuk polinomial berderajat lima atau lebih; dan analisis kasus khusus untuk polinomial berderajat 5 atau lebih yang dapat diselesaikan dengan radikal.

6. Bab VI Penutup

Bab terakhir ini berisi kesimpulan dari keseluruhan hasil penelitian serta saran untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

BAB VI

PENUTUP

6.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil studi literatur dan analisis mendalam yang telah dipaparkan pada bab-bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan yang menjawab seluruh rumusan masalah penelitian sebagai berikut:

1. Grup solvabel adalah sebuah grup G yang memiliki deret subnormal $G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_k = \{e\}$ sedemikian sehingga setiap grup faktor G_i/G_{i+1} bersifat abelian. Secara ekuivalen, sebuah grup G adalah solvabel jika dan hanya jika deret turunannya $G^{(k)}$ berakhir pada subgrup trivial $\{e\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}^+$. Sifat-sifat fundamental dari grup solvabel meliputi setiap grup abelian adalah solvabel, dan sifat kesolvabelan diwariskan ke subgrup serta ke grup faktor. Analisis terhadap grup simetri membuktikan bahwa S_n adalah solvabel untuk $n \leq 4$, namun S_n dan A_n adalah tidak solvabel untuk $n \geq 5$, yang menjadi halangan struktural.
2. Teori Galois membangun hubungan antara perluasan lapangan dan grup melalui Teorema Fundamental Teori Galois (Teorema 4.14). Teorema ini menetapkan sebuah korespondensi bijektif yang membalik inklusi antara himpunan sublapangan E dari perluasan Galois K/F dan himpunan subgrup H dari grup Galois $\mathrm{Gal}(K/F)$. Kunci dari hubungan ini adalah bahwa sublapangan E merupakan perluasan Galois atas F jika dan hanya jika subgrup H yang berkorespondensi dengannya adalah subgrup normal dari $\mathrm{Gal}(K/F)$.

3. Pembuktian Teorema Utama Kesolvabelan menyatukan kedua pilar teoretis di atas. Teorema ini menyatakan bahwa sebuah polinomial $f(x)$ dapat diselesaikan dengan radikal jika dan hanya jika grup Galois-nya $\mathrm{Gal}(f/F)$ adalah grup solvabel. Teorema 5.6 menunjukkan bahwa menara perluasan radikal dapat dikonstruksi menjadi perluasan Galois L''/F yang grup Galois-nya G_{total} terbukti solvabel. $\mathrm{Gal}(f/F)$ kemudian ditunjukkan sebagai grup faktor dari G_{total} yang solvabel, sehingga $\mathrm{Gal}(f/F)$ juga solvabel. Teorema 5.6 menggunakan deret turunan dari grup $G = \mathrm{Gal}(f/F)$ yang solvabel untuk membangun menara sublapangan. Dengan bantuan teori Kummer (Teorema 5.2), setiap langkah dalam menara lapangan ini dibuktikan ekuivalen dengan perluasan radikal sederhana, sehingga membuktikan $f(x)$ dapat diselesaikan dengan radikal.
4. Teorema Utama Kesolvabelan memberikan jawaban definitif atas masalah penyelesaian polinomial.
   a. Polinomial umum berderajat $n \leq 4$ memiliki grup Galois S_n. Karena S_2, S_3, dan S_4 adalah grup solvabel, Teorema Utama Kesolvabelan menjamin bahwa polinomial umum berderajat dua, tiga, dan empat dapat diselesaikan dengan radikal.
   b. Polinomial umum berderajat $n \geq 5$ memiliki grup Galois S_n. Karena S_n untuk $n \geq 5$ adalah grup tidak solvabel, Teorema Utama Kesolvabelan membuktikan bahwa polinomial umum berderajat lima atau lebih tidak dapat diselesaikan dengan radikal (Teorema Abel-Ruffini).

c. Teorema Abel-Ruffini hanya berlaku untuk polinomial umum. Sebuah polinomial spesifik $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ berderajat $n \geq 5$ dapat diselesaikan dengan radikal jika dan hanya jika grup Galois spesifiknya, $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$ yang merupakan subgrup dari S_n adalah grup solvabel. Grup ini bisa lebih kecil dari S_n karena adanya relasi aljabar tambahan antar akar. Contohnya, $x^5 - 1$ dan $x^8 - 2$ keduanya memiliki grup Galois yang solvabel, sehingga keduanya dapat diselesaikan dengan radikal.

6.2. Saran

Berdasarkan studi literatur yang dilakukan, terdapat beberapa saran yang dapat diajukan untuk penelitian lebih lanjut guna memperdalam dan memperluas kajian ini:

1. Penelitian ini berfokus pada pembuktian teoretis. Penelitian lanjutan yang bersifat komputasional dapat difokuskan pada implementasi algoritma untuk menghitung grup Galois dari polinomial-polinomial spesifik atas $\mathbb{Q}$. Studi semacam ini dapat digunakan untuk menentukan secara praktis apakah sebuah polinomial berderajat lima atau lebih dapat diselesaikan dengan radikal atau tidak.
2. Seluruh analisis dalam skripsi ini dibatasi pada lapangan berkarakteristik nol. Teori Galois mengalami modifikasi yang signifikan ketika diterapkan pada lapangan berkarakteristik p, di mana konsep separabilitas tidak lagi trivial. Penelitian selanjutnya dapat mengkaji bagaimana teori Galois dan kriteria kesolvabelan beradaptasi dalam konteks karakteristik p.

3. Fokus penelitian ini adalah aplikasi klasik teori Galois pada kesolvabelan polinomial. Teori Galois modern memiliki aplikasi yang jauh lebih luas. Penelitian masa depan dapat mengeksplorasi penerapan teori Galois dalam bidang-bidang lain, seperti Galois invers yang masih menjadi masalah terbuka, atau aplikasi dalam kriptografi kurva eliptik dan teori pengkodean.
4. Naskah skripsi ini menyajikan alur pembuktian yang lengkap dan sistematis dari teori grup hingga aplikasi teori Galois. Diharapkan naskah ini dapat dijadikan sebagai salah satu referensi pendukung berbahasa Indonesia bagi mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah Aljabar Abstrak Lanjut atau Teori Galois untuk membantu memahami keterkaitan antar konsep secara utuh.

DAFTAR PUSTAKA

Alfianti, F. (2017). *Grup Solvable dan Penerapannya dalam Kriptografi*. (Skripsi Sarjana, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga).

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (3rd ed.). John Wiley & Sons.

Gallian, J. A. (2025). *Contemporary Abstract Algebra* (11th ed.). Chapman & Hall/CRC.

Herstein, I. N. (1996). *Abstract Algebra* (3rd ed.). Prentice-Hall Inc.

Lang, S. (2002). *Algebra* (3rd ed.). Springer.

Rotman, J. (1998). *Galois Theory* (2nd ed.). Springer.

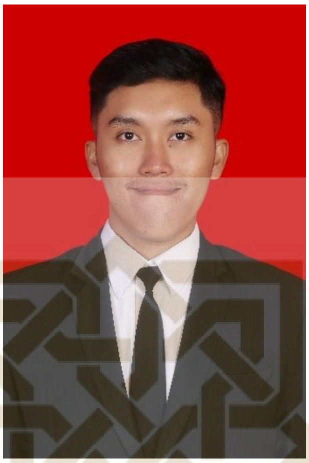
Sanudin, F., Patty, H. W. M., Rumlawang, F. Y., & Patty, D. (2022). Kajian Grup Galois Isomorfis dengan Grup Alternating A5. *Tensor: Pure and Applied Mathematics Journal*, *3*(1), 49–56.

Sapulete, C., Patty, H. W. M., Rumlawang, F. Y., & Patty, D. (2023). Kajian Dasar Struktur Grup Galois. *Parameter: Journal of Mathematics, Statistics and Its Applications*, *2*(1), 139–144.

Sari, D. R. D. (2019). *Sifat-Sifat Grup Solvable*. (Skripsi Sarjana, Universitas Andalas).

Stewart, I. (2015). *Galois Theory* (4th ed.). Chapman & Hall.

DATA DIRI



Nama	:	Sofyan Tio Fajar Maulana
Tempat/Tanggal Lahir	:	Blora, 23 Mei 2002
Jenis Kelamin	:	Laki-Laki
Agama	:	Islam
Golongan Darah	:	A
Alamat Domisili	:	Jl. Cindelaras Raya No. 105, Nglarang, Wedomartani, Ngemplak, Sleman, DI Yogyakarta 55584
Alamat Asal	:	Dk. Soronini 002/002, Sonokulon, Todanan, Blora, Jawa Tengah 58256
No. HP/WA	:	085643498450

Riwayat Pendidikan	:	SD Negeri 1 Sonokulon	(2007 – 2013)
		SMP Negeri 1 Todanan	(2013 – 2016)
		SMA Negeri 1 Blora	(2016 – 2019)
		UIN Sunan Kalijaga Yogayakarta	(2021 – 2025)