

SKRIPSI

**HIMPUNAN PEMBEDA ANTIPODAL PADA GRAF HASIL
OPERASI KORONA ANTARA GRAF LENGKAP ORDE
SATU DENGAN GRAF LINTASAN ORDE DUA DAN TIGA**



HILWA HAWALI IRSYA

22106010051

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2026

**HIMPUNAN PEMBEDA ANTIPODAL PADA GRAF HASIL
OPERASI KORONA ANTARA GRAF LENGKAP ORDE
SATU DENGAN GRAF LINTASAN ORDE DUA DAN TIGA**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



diajukan oleh

HILWA HAWALI IRSYA

22106010051

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2026



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Hilwa Hawali Irsya
NIM : 22106010051
Judul Skripsi : Himpunan Pembeda Antipodal pada Graf Hasil Operasi Korona antara Graf Lengkap Orde Satu dengan Graf Lintasan Orde Dua dan Tiga

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Pembimbing I

Dedy Rahmadi, M.Sc.

NIP. 19930807 202203 1 001

Pembimbing II

Arif Munandar, M.Sc.

NIP. 19920721 201903 1 013

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Yogyakarta, 06 Februari 2026



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-536/Un.02/DST/PP.00.9/03/2026

Tugas Akhir dengan judul : Himpunan Pembeda Antipodal pada Graf Hasil Operasi Korona antara Graf Lengkap Orde Satu dengan Graf Lintasan Orde Dua dan Tiga

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : HILWA HAWALI IRSYA
Nomor Induk Mahasiswa : 22106010051
Telah diujikan pada : Rabu, 25 Februari 2026
Nilai ujian Tugas Akhir : A-

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Deddy Rahmadi, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 69aa9906e611f



Penguji I

Arif Munandar, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 69aa7d125b16d



Penguji II

Aulia Khifah Futhona, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 69aa4cc408b89



Yogyakarta, 25 Februari 2026

UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 69ae43476083b

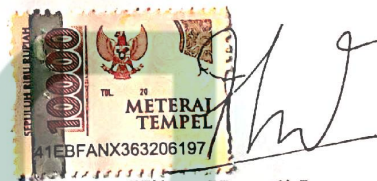
SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Hilwa Hawali Irsya
NIM : 22106010051
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 06 Februari 2026



METERAI
TEMPEL
1000
41EBFANX363206197

Hilwa Hawali Irsya

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



Skripsi ini penulis persembahkan untuk diri sendiri, keluarga, serta almamater

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.

HALAMAN MOTTO



”Ingatlah kepada-Ku, niscaya Aku akan ingat kepadamu; bersyukurlah kepada-Ku dan janganlah kamu ingkar kepada-Ku” - QS. Al-Baqarah: 152

”There’s nothing to rush you, because you have your own process — and that’s okay” - Marissa Anita

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur atas kehadiran Allah Swt. yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Himpunan Pembeda Antipodal pada Graf Hasil Operasi Korona antara Graf Lengkap Orde Satu dengan Graf Lintasan Orde Dua dan Tiga". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Allah Swt. yang senantiasa memberikan kesehatan, kekuatan, dan kemudahan kepada penulis.
2. Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Noor Saif Muhammad Mussafi, S.Si., M.Sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
5. Deddy Rahmadi, M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menye-

diakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.

6. Arif Munandar, M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
7. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.
8. Orang Tua dan keluarga yang senantiasa memberikan doa, dukungan moral, serta motivasi kepada penulis.
9. Sahabat PPMQ angkatan pertama yang telah memberikan kebersamaan, dukungan, serta menjadi rumah dan keluarga bagi penulis selama masa perkuliahan.
10. Sahabat Pentagon Rajin Tahajjud, yang telah memberikan dukungan dan kebersamaan kepada penulis sejak awal masa perkuliahan hingga tahap akhir penyusunan skripsi ini.
11. Teman-teman Matematika angkatan 2022 yang telah menemani, mendukung, serta memberikan motivasi, bantuan, dan semangat selama menjalani masa perkuliahan.
12. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.
13. *On Marissa's Mind and Pancatera Podcast, for the voices that kept me inspired and the stories that kept me whole, and for the gentle reminders that growth is not always linear but always meaningful.*

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 20 Februari 2026

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMBANG	xvi
INTISARI	xvii
ABSTRACTxviii
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	3
1.3. Rumusan Masalah	4
1.4. Tujuan Penelitian	4
1.5. Manfaat Penelitian	5
1.6. Tinjauan Pustaka	5
1.7. Metode Penelitian	8
1.8. Sistematika Penulisan	9
II DASAR TEORI	11

2.1. Grup	11
2.1.1. Grup Siklik	12
2.2. Graf	13
2.2.1. Subgraf	14
2.2.2. <i>Adjacent</i> dan Insiden	17
2.2.3. Keterhubungan	19
2.2.4. Jarak dan Diameter	21
2.3. Himpunan Pembeda	22
2.3.1. Kardinalitas	24
2.3.2. Dimensi Metrik	24
2.3.3. Simpul Antipodal	27
2.4. Jenis-Jenis Graf	27
2.4.1. Graf Lengkap	28
2.4.2. Graf Lintasan	28
2.4.3. Graf Identitas	29
2.5. Isomorfisma Graf	30
2.6. Operasi Graf	31
III HASIL DAN PEMBAHASAN	33
3.1. Konsep Dasar Himpunan Pembeda Antipodal, Himpunan Pembeda Antipodal Independent, dan Himpunan Pembeda Antipodal Pendant	33
3.1.1. Himpunan Pembeda Antipodal	33
3.1.2. Himpunan Pembeda Antipodal Independent	35
3.1.3. Himpunan Pembeda Antipodal Pendant	37
3.2. Dimensi Antipodal (ζ_{ad}) dan Dimensi Antipodal Independent (ζ_{aid}), dan Dimensi Antipodal Pendant (ζ_{apd}) pada Graf $K_1 \odot mP_2$	39

3.2.1. Dimensi Antipodal (ζ_{ad}) dan Dimensi Antipodal Independent (ζ_{aid}) pada Graf $K_1 \odot mP_2$	40
3.2.2. Dimensi Antipodal Pendant (ζ_{apd}) pada Graf $K_1 \odot mP_2$	49
3.3. Dimensi Antipodal (ζ_{ad}), Dimensi Antipodal Independent (ζ_{aid}), dan Dimensi Antipodal Pendant (ζ_{apd}) pada Graf $K_1 \odot mP_3$	62
IV PENUTUP	88
4.1. Kesimpulan	88
4.2. Saran	89
DAFTAR PUSTAKA	90
CURRICULUM VITAE	94

DAFTAR TABEL

1.1	Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian	7
2.1	Tabel Jarak Graf G	23
2.2	Tabel Jarak Graf G	25
3.1	Tabel Jarak P_4	34
3.2	Tabel Jarak K_4	36
3.3	Tabel Jarak Graf $K_1 \odot 2P_2$	41
3.4	Tabel Jarak Graf $K_1 \odot 3P_2$	43
3.5	Tabel Jarak Graf $K_1 \odot 2P_3$	64
3.6	Tabel Jarak Graf $K_1 \odot 3P_3$	68



DAFTAR GAMBAR

1.1	Skema Metode Penelitian	9
2.1	Graf G secara umum	14
2.2	Graf H_1 merupakan subgraf dari graf G	15
2.3	Graf H_2 bukan merupakan subgraf dari G	15
2.4	Graf H_1 merupakan subgraf terinduksi dari graf G	16
2.5	Graf H_2 bukan merupakan subgraf terinduksi dari graf G	16
2.6	Graf G untuk menunjukkan <i>adjacent</i> dan insiden	17
2.7	Graf G untuk menunjukkan derajat simpul	18
2.8	Graf G untuk menunjukkan <i>walk</i> , <i>trail</i> , dan <i>path</i>	19
2.9	Graf Terhubung G	20
2.10	Graf G untuk menentukan himpunan pembeda	22
2.11	Graf G untuk menentukan kardinalitas minimum ($\dim(G)$)	24
2.12	Graf G untuk menentukan simpul antipodal	27
2.13	Graf Lengkap K_5	28
2.14	Graf Lintasan P_4	28
2.15	Graf identitas atas grup \mathbb{Z}_7	29
2.16	Graf G_1 isomorfis dengan graf G_2	30
2.17	Graf $P_2 \odot K_3$	31
3.1	Graf Lintasan P_4	34
3.2	Graf Lengkap K_4	36
3.3	Subgraf Terinduksi $T = \{v_1, v_4\}$	38
3.4	Subgraf Terinduksi $T = \{v_1, v_3, v_4\}$	39

3.5	Graf $K_1 \odot mP_2$	39
3.6	Graf $K_1 \odot 2P_2$	40
3.7	Graf $K_1 \odot 3P_2$	43
3.8	Subgraf Terinduksi $T = \{u_1, u_2\}$	50
3.9	Subgraf Terinduksi $T = \{u_1, v_1, u_2\}$	52
3.10	Subgraf Terinduksi $T = \{u_1, u_2, u_3\}$	54
3.11	Subgraf Terinduksi $T = \{u_1, v_1, u_2, u_3\}$	55
3.12	Graf $K_1 \odot mP_3$	63
3.13	Graf $K_1 \odot 2P_3$	63
3.14	Subgraf terinduksi $T = \{u_1, v_1, u_2\}$	66
3.15	Graf $K_1 \odot 3P_3$	67
3.16	Subgraf Terinduksi $T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3\}$	72

DAFTAR LAMBANG

- $x \in A$: x anggota A
- $A \subseteq X$: A himpunan bagian (*subset*) atau sama dengan X
- \mathbb{Z} : himpunan semua bilangan bulat
- $\deg(v)$: derajat dari simpul v
- $\text{diam}(G)$: diameter dari graf G
- $d(u, v)$: jarak antara simpul u dan v
- T : himpunan pembeda
- $r(u|T)$: nilai representasi jarak dari simpul u terhadap himpunan pembeda
- $\zeta_{ad}(G)$: dimensi antipodal pada graf G
- $\zeta_{aid}(G)$: dimensi antipodal independent pada graf G
- $\zeta_{apd}(G)$: dimensi antipodal pendant pada graf G
- $\langle G \rangle$: G merupakan subgraf terinduksi
- K_n : graf lengkap orde n
- mP_n : m buah salinan graf lintasan orde n
- $K_i \odot P_j$: graf hasil operasi korona antara graf lengkap orde i dengan graf lintasan orde j
- : akhir suatu bukti
- : menuju
- ⇔ : jika dan hanya jika

INTISARI

HIMPUNAN PEMBEDA ANTIPODAL PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA ANTARA GRAF LENGKAP ORDE SATU DENGAN GRAF LINTASAN ORDE DUA DAN TIGA

Oleh

Hilwa Hawali Irsya

22106010051

Himpunan pembeda antipodal merupakan himpunan pembeda yang memuat setidaknya satu pasang simpul antipodal, yaitu pasangan simpul yang jaraknya sama dengan diameter graf. Dalam penelitian ini dikaji dua variasi dari himpunan pembeda antipodal, yaitu himpunan pembeda antipodal independent dan himpunan pembeda antipodal pendant. Objek kajian dalam penelitian ini adalah graf $K_1 \odot mP_2$, yaitu graf hasil operasi korona antara graf lengkap orde satu dengan graf lintasan orde dua, dan graf $K_1 \odot mP_3$, yaitu graf hasil operasi korona antara graf lengkap orde satu dengan graf lintasan orde tiga. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus umum dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}) pada graf $K_1 \odot mP_2$ dan graf $K_1 \odot mP_3$ untuk nilai $m \geq 2$.

Kata kunci : himpunan pembeda antipodal, dimensi antipodal, operasi korona, graf lengkap, graf lintasan.

ABSTRACT

ANTIPODAL RESOLVING SETS ON CORONA PRODUCT GRAPH OF THE COMPLETE GRAPH OF ORDER ONE AND THE PATH GRAPH OF ORDER TWO AND THREE

By

Hilwa Hawali Irsya

22106010051

Antipodal resolving set is a resolving set that contains at least one pair of antipodal vertices, namely a pair of vertices whose distance equals the diameter of the graph. In this research, two variations of antipodal resolving sets are studied, namely the antipodal independent resolving set and the antipodal pendant resolving set. The objects of this research are the graphs $K_1 \odot mP_2$, which are corona product graphs of the complete graph of order one and the path graph of order two, and $K_1 \odot mP_3$, which are corona product graphs of the complete graph of order one and the path graph of order three. This research aims to determine the general formulas of the antipodal dimension (ζ_{ad}), the antipodal independent dimension (ζ_{aid}), and the antipodal pendant dimension (ζ_{apd}) for the graphs $K_1 \odot mP_2$ and $K_1 \odot mP_3$ for $m \geq 2$.

Keyword : antipodal resolving sets, antipodal dimension, corona product, complete graph, path graph.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan ilmu dasar yang memiliki peran penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu cabang matematika yang berkembang pesat dan memiliki banyak aplikasi dalam pemodelan permasalahan dunia nyata adalah teori graf. Sejarah teori graf dimulai dari penyelesaian masalah jembatan Königsberg oleh seorang matematikawan terkenal yang berasal dari Swiss, yaitu Leonhard Euler pada tahun 1736. Euler memodelkan daratan sebagai titik (simpul) dan jembatan sebagai garis (sisi) untuk membuktikan bahwa tidak mungkin menyeberangi setiap jembatan tepat satu kali. Sejak saat itu, teori graf banyak digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit beserta hubungan di antara objek tersebut, mulai dari analisis jejaring sosial, struktur molekul kimia, hingga optimasi jalur transportasi dan jaringan komputer (Munir, 2009).

Perkembangan teori graf tidak hanya terjadi dalam penerapannya saja, tetapi juga dalam sisi teoritisnya. Salah satunya adalah konsep *resolvability* yang kemudian melahirkan konsep dimensi metrik. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Slater dengan istilah *location number* pada tahun 1975 (Slater, 1975). Kemudian, Harary dan Melter pada tahun 1976 juga memperkenalkan konsep serupa yang dikenal dengan istilah *metric dimension* (Harary & Melter, 1976). Ide dasar dari dimensi metrik adalah menentukan posisi unik setiap simpul dalam graf berdasarkan jaraknya terhadap suatu himpunan simpul tertentu yang disebut himpunan pembe-

da (*resolving set*). Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda disebut sebagai dimensi metrik, yang dinotasikan dengan $\dim(G)$ (Chartrand et al., 2000).

Seiring berjalannya waktu, konsep dimensi metrik terus mengalami perkembangan yang signifikan dengan munculnya berbagai variasi himpunan pembeda. Beberapa penelitian terdahulu telah mengkaji mengenai variasi dari himpunan pembeda, di antaranya adalah *Uniquely Identifying the Edges of A Graphs: the Edge Metric Dimension*, yang membahas tentang konsep dimensi metrik sisi (Kelenc et al., 2018). *The Local Metric Dimension of A Graph*, yang membahas tentang konsep dimensi metrik lokal (Okamoto et al., 2010), dan *The Dominant Metric Dimension of Graphs*, yang membahas tentang konsep dimensi metrik dominasi (Susilowati et al., 2020). Penelitian-penelitian tersebut menunjukkan bahwa modifikasi syarat pada himpunan pembeda dapat memunculkan karakteristik baru yang menarik dari sebuah graf.

Perkembangan terbaru dalam konsep himpunan pembeda diperkenalkan oleh Aruna Sakthi dan Rajeswari pada tahun 2025 melalui konsep dimensi antipodal. Dalam penelitian mereka yang berjudul *Antipodal Resolving Sets on Algebraic Graphs of Finite Groups*, mereka mendefinisikan *Antipodal Resolving Set (ARS)* sebagai himpunan pembeda yang memiliki syarat tambahan, yaitu himpunan tersebut harus memuat setidaknya satu pasang simpul antipodal (pasangan simpul yang jaraknya sama dengan diameter graf). Selain itu, beberapa variasi dari *antipodal resolving set* juga diperkenalkan dalam penelitian tersebut, yaitu *Antipodal Independent Resolving Set (AIRS)* dan *Antipodal Pendant Resolving Set (APRS)*. Penelitian yang dilakukan oleh Aruna Sakthi dan Rajeswari (2025) tersebut berfokus pada penerapan konsep terhadap graf aljabar, khususnya graf identitas dan graf order prima atas grup hingga (Sakthi & Rajeswari, 2025).

Meskipun konsep dimensi antipodal telah diperkenalkan, penerapannya pada kelas graf lain masih sangat terbuka untuk dieksplorasi. Sejauh ini, penelitian terkait *antipodal resolving set* lebih banyak difokuskan pada graf aljabar, seperti graf identitas dan graf order prima atas grup hingga. Namun, kajian mengenai kelas graf hasil suatu operasi graf masih relatif terbatas. Salah satu operasi graf yang menarik untuk diteliti adalah operasi korona. Operasi korona sendiri merupakan salah satu konstruksi graf yang menggabungkan satu graf sebagai pusat dengan salinan dari graf lain, sehingga menghasilkan struktur baru yang lebih kompleks (Yero et al., 2011). Sehingga, dalam penelitian ini, akan dibahas mengenai dimensi antipodal pada graf $K_1 \odot mP_2$, yaitu graf hasil operasi korona antara graf lengkap (K_1) dengan m buah salinan graf lintasan (P_2) dan graf $K_1 \odot mP_3$, yaitu graf hasil operasi korona antara graf lengkap (K_1) dengan m buah salinan graf lintasan (P_3). Kedua graf tersebut dipilih karena memiliki struktur yang beraturan, tetapi tetap menyimpan karakteristik jarak yang unik, sehingga menarik untuk diteliti. Selain itu, kajian tentang *antipodal resolving set* pada jenis graf tersebut belum banyak ditemukan dalam literatur, sehingga penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi baru dalam pengembangan teori graf khususnya terkait *antipodal resolving set* pada kelas graf terstruktur.

1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada tugas akhir ini adalah permasalahan yang dikaji dibatasi pada kelas graf hasil operasi korona antara graf lengkap (K_1) dengan m salinan graf lintasan (P_n), yang dinotasikan dengan $K_1 \odot mP_n$. Analisis difokuskan pada kasus $n = 2$ dan $n = 3$ dengan $m \geq 2$, untuk menentukan nilai dari dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}). Penelitian ini bersifat teoritis murni yang menekankan pada

pembuktian matematis, sehingga tidak membahas mengenai implementasi atau penerapannya dalam kehidupan nyata.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep dasar tentang himpunan pembeda antipodal, himpunan pembeda antipodal independent, dan himpunan pembeda antipodal pendant?
2. Bagaimana rumus umum dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}) untuk graf $K_1 \odot mP_2$?
3. Bagaimana rumus umum dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}) untuk graf $K_1 \odot mP_3$?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari konsep dasar mengenai himpunan pembeda antipodal, himpunan pembeda antipodal independent, dan himpunan pembeda antipodal pendant pada suatu graf.
2. Menentukan rumus umum dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}) untuk graf $K_1 \odot mP_2$.
3. Menentukan rumus umum dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}) untuk graf $K_1 \odot mP_3$.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman tentang konsep dasar himpunan pembeda antipodal, himpunan pembeda antipodal independent, dan himpunan pembeda antipodal pendant pada suatu graf.
2. Memberikan pemahaman dalam menentukan rumus umum dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}) untuk graf $K_1 \odot mP_2$.
3. Memberikan pemahaman dalam menentukan rumus umum dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}) untuk graf $K_1 \odot mP_3$.

1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan skripsi ini bersumber dari buku dan artikel.

1. Buku karya (Munandar, 2022) dengan judul "*Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*" yang membahas tentang konsep dasar graf. Pembahasan di dalam buku tersebut di antaranya meliputi definisi graf, subgraf, *adjacent* dan insiden, serta keterhubungan antar simpul. Buku tersebut menjadi rujukan dalam mendefinisikan terminologi dasar pada graf.
2. Artikel karya (Chartrand et al., 2000) dengan judul "*Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of a Graph*" yang membahas tentang konsep dasar himpunan pembeda pada graf beserta karakterisasi dimensi metrik

($\dim(G)$) sebagai ukuran minimum banyaknya simpul yang diperlukan untuk membedakan seluruh simpul dalam graf. Artikel tersebut memperkenalkan representasi metrik suatu simpul terhadap himpunan pembeda, serta memberikan hasil mengenai batas nilai dimensi metrik untuk beberapa kelas graf.

3. Artikel karya (Sakthi & Rajeswari, 2025) dengan judul "***Antipodal Resolving Sets on Algebraic Graphs of Finite Groups***" yang membahas tentang pengembangan konsep *antipodal resolving set* sebagai variasi baru dari himpunan pembeda pada graf. Artikel tersebut meninjau bagaimana pasangan simpul yang berjarak sama dengan diameter graf (simpul antipodal) menjadi syarat tambahan dalam menentukan himpunan pembeda. Konsep *antipodal resolving set* kemudian diterapkan pada beberapa graf yang dikonstruksi dari grup hingga, yaitu graf identitas dan graf order prima dari grup Z_n dan grup quaternion (Q_n).
4. Artikel karya (Yero et al., 2011) dengan judul "***On The Metric Dimension of Corona Product Graphs***" yang membahas tentang penentuan dimensi metrik pada graf hasil operasi korona. Artikel tersebut mengkaji tentang bagaimana operasi korona antara dua graf dapat mengubah struktur jarak sehingga mempengaruhi penentuan himpunan pembeda. Selain itu, artikel tersebut juga memberikan rumus umum untuk menghitung dimensi metrik dari $G \odot^k H$, yaitu operasi korona yang diterapkan secara berulang.

Beberapa artikel dan buku dijadikan rujukan untuk memperkuat konsep dasar dalam penelitian ini. Berikut disajikan tabel persamaan dan perbedaan antara penelitian-penelitian sebelumnya dengan penelitian yang dilakukan penulis.

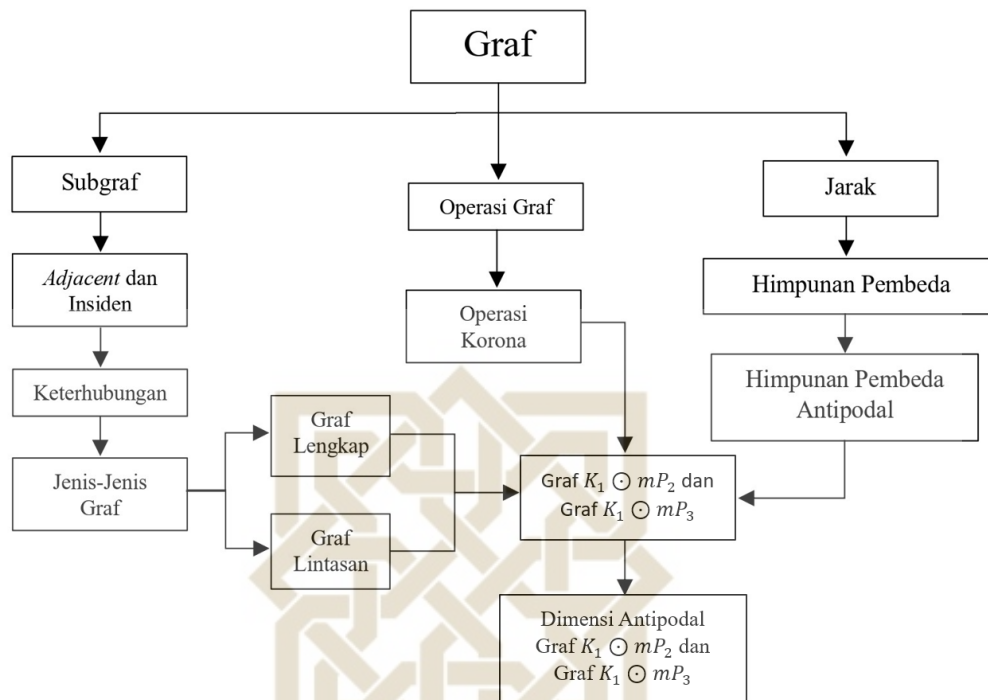
Tabel 1.1 Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian

No	Judul	Penulis	Persamaan	Perbedaan
1	<i>Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of a Graph</i>	Gary Chartrand, Linda Eroh, Mark A. Johnson, Ortrud R. Oellermann	Membahas tentang himpunan pembeda dan konsep jarak pada graf	Membahas tentang himpunan pembeda dengan syarat tambahan simpul antipodal
2	<i>Antipodal Resolving Sets on Algebraic Graphs of Finite Groups</i>	K. Aruna Sakthi, R. Rajeswari	Membahas tentang himpunan pembeda antipodal beserta variasinya, yaitu himpunan pembeda antipodal independent dan himpunan pembeda antipodal pendant	Menerapkan konsep himpunan pembeda antipodal beserta variasinya pada graf $K_1 \odot mP_2$ dan graf $K_1 \odot mP_3$
3	<i>On The Metric Dimension of Corona Product Graphs</i>	Ismael González Yero, Dorota Kuziak, Juan Alberto Rodríguez-Velázquez	Membahas tentang graf hasil operasi korona	Membahas konsep himpunan pembeda antipodal beserta variasinya pada graf hasil operasi korona, yaitu graf $K_1 \odot mP_2$ dan graf $K_1 \odot mP_3$

1.7. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi dan artikel terkait topik penelitian yaitu konsep dasar himpunan pembeda antipodal (*antipodal resolving set*) dan graf hasil operasi korona. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

1. Membahas konsep dasar graf yang meliputi subgraf, *adjacent* dan insiden, keterhubungan, jarak dan diameter, jenis-jenis graf, serta operasi graf.
2. Membahas konsep dasar himpunan pembeda antipodal beserta variasinya yaitu himpunan pembeda antipodal independent dan himpunan pembeda antipodal pendant.
3. Menerapkan konsep himpunan pembeda antipodal beserta variasinya pada graf $K_1 \odot mP_2$ dan graf $K_1 \odot mP_3$.
4. Menentukan kardinalitas minimum dari himpunan pembeda antipodal beserta variasinya untuk memperoleh nilai dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}) pada graf $K_1 \odot mP_2$ dan graf $K_1 \odot mP_3$.
5. Menentukan rumus umum dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}) pada graf $K_1 \odot mP_2$ dan graf $K_1 \odot mP_3$.



Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab, yaitu sebagai berikut:

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
 YOGYAKARTA

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas tentang konsep dasar graf yang meliputi subgraf, *adjacent* dan insiden, keterhubungan, serta jarak dan diameter. Konsep dasar himpunan pembeda yang meliputi kardinalitas, dimensi metrik, dan simpul antipodal. Kemudian jenis-jenis graf, yaitu graf lengkap dan graf lintasan, serta operasi graf yaitu operasi korona.
- BAB 3** : Bab ini membahas tentang konsep dasar himpunan pembeda antipodal, himpunan pembeda antipodal independent, dan himpunan pembeda antipodal pendant, serta rumus umum dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}) pada graf $K_1 \odot mP_2$ dan graf $K_1 \odot mP_3$.
- BAB 4** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

PENUTUP

Pada bab penutup ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Himpunan pembeda antipodal adalah himpunan simpul pada suatu graf yang mampu membedakan seluruh simpul melalui representasi jarak serta memuat setidaknya satu simpul yang jaraknya sama dengan diameter graf. Himpunan pembeda antipodal independent merupakan himpunan pembeda antipodal yang setiap pasang simpulnya tidak saling *adjacent*. Sedangkan himpunan pembeda antipodal pendant adalah himpunan pembeda antipodal yang memuat setidaknya satu simpul pendant (simpul berderajat satu). Kardinalitas minimum dari masing-masing himpunan pembeda antipodal disebut sebagai dimensi antipodal (ζ_{ad}), dimensi antipodal independent (ζ_{aid}), dan dimensi antipodal pendant (ζ_{apd}).
2. Pada graf hasil operasi korona antara graf lengkap orde satu dengan m salinan graf lintasan orde dua, yaitu graf $K_1 \odot mP_2$ dengan $m \geq 2$, diperoleh bahwa dimensi antipodal dan dimensi antipodal independent memiliki nilai

yang sama, yaitu

$$\zeta_{ad}(K_1 \odot mP_2) = \zeta_{aid}(K_1 \odot mP_2) = m$$

sedangkan dimensi antipodal pendant pada graf tersebut adalah

$$\zeta_{apd}(K_1 \odot mP_2) = m + 1.$$

3. Pada graf hasil operasi korona antara graf lengkap orde satu dengan m salinan graf lintasan orde tiga, yaitu graf $K_1 \odot mP_3$ dengan $m \geq 2$, diperoleh bahwa dimensi antipodal, dimensi antipodal independent, dan dimensi antipodal pendant memiliki nilai yang sama, yaitu

$$\zeta_{ad}(K_1 \odot mP_3) = \zeta_{aid}(K_1 \odot mP_3) = \zeta_{apd}(K_1 \odot mP_3) = 2m - 1.$$

4.2. Saran

Saran yang akan penulis sampaikan untuk penelitan selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini, pembahasan himpunan pembeda antipodal, himpunan pembeda antipodal independent, dan himpunan pembeda antipodal pendant masih dibatasi pada graf hasil operasi korona antara graf lengkap orde satu dengan graf lintasan orde dua dan tiga. Oleh karena itu, disarankan bagi penelitian selanjutnya untuk mengkaji himpunan pembeda antipodal beserta variasinya pada graf hasil operasi korona tersebut dengan orde yang lebih besar atau dengan jenis graf lainnya.
2. Penelitian ini masih terbatas pada operasi korona antara graf sederhana. Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan kajian ini dengan mempertimbangkan operasi graf lainnya, seperti operasi join, kartesian, atau amalgamasi, serta

pada kelas graf yang lain, untuk melihat pengaruh struktur graf terhadap nilai dimensi antipodal beserta variasinya.

3. Penelitian mengenai himpunan pembeda antipodal beserta variasinya juga dapat dikembangkan lebih lanjut pada berbagai jenis graf aljabar yang dibangun dari grup hingga, misalnya graf cayley, graf identitas, graf pangkat, atau graf order prima.
4. Penelitian selanjutnya juga dapat mengkaji jenis graf lain yang memiliki perbedaan antara nilai dimensi antipodal dan dimensi antipodal independent.



DAFTAR PUSTAKA

- Balakrishnan, R. & Ranganathan, K. (2012). *A Textbook of Graph Theory*. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, DOI: 10.1007/978-1-4614-4529-6.
- Bondy, J. A. & Murty, U. S. R. (1982). *Graph Theory with Applications*. Elsevier Science Publishing.
- Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105(1-3):99–113.
- Chartrand, G. & Zhang, P. (2013). *A first course in graph theory*. Courier Corporation.
- Darwanto, Karsoni, B. D., & Junaidi (2020). *Teori Himpunan*. Universitas Muhammadiyah Kotabumi.
- Diestel, R. (2005). *Graph Theory*. Springer-Verlag Heidelberg, New York.
- Estrada-Moreno, A., Rodríguez-Velázquez, J. A., & Yero, I. G. (2013). The k-metric dimension of a graph. *arXiv preprint arXiv:1312.6840*.
- Fraleigh, J. B. (2003). *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India.
- Gallian, J. (2021). *Contemporary abstract algebra*. Chapman and Hall/CRC.
- Harary, F. & Melter, R. A. (1976). On the metric dimension of a graph. *Ars Combinatoria*, 2:191–195.

- Hsu, L.-H. & Lin, C.-K. (2008). *Graph theory and interconnection networks*. CRC press.
- Kelenc, A., Tratnik, N., & Yero, I. G. (2018). Uniquely identifying the edges of a graph: the edge metric dimension. *Discrete Applied Mathematics*, 251:204–220.
- Munandar, A. (2022). *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*. Sleman : Deepublish (CV Budi Utama).
- Munir, R. (2009). Matematika diskrit edisi ketiga. *Informatika, Bandung*.
- Okamoto, F., Phinezy, B., & Zhang, P. (2010). The local metric dimension of a graph. *Mathematica Bohemica*, 135(3):239–255.
- Roza, I., Narwen, & Zulakmal (2014). Graf garis (line graph) dari graf siklus, graf lengkap dan graf bintang. *Jurnal Matematika UNAND*, 3(2):1–4.
- Sakthi, K. A. & Rajeswari, R. (2025). Antipodal resolving sets on algebraic graphs of finite groups. *Sigma*, 43(2):555–561.
- Septiana Eka, R. & Rahadjeng, B. (2012). Dimensi metrik pada graf lintasan, graf komplit, graf sikel, graf bintang dan graf bipartit komplit. *Teorema*, 3:3.
- Slater, P. J. (1975). Leaves of trees. In *Proceedings of the 6th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, volume 14 of *Congressus Numerantium*, pages 549–559.
- Sooryanarayana, B. (1998). On the metric dimension of a graph. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 29:413–416.
- Susilowati, L., Sa'adah, I., Fauziyyah, R. Z., Erfanian, A., et al. (2020). The dominant metric dimension of graphs. *Heliyon*, 6(3).

Yero, I. G., Kuziak, D., & Rodríguez-Velázquez, J. A. (2011). On the metric dimension of corona product graphs. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(9):2793–2798.



CURRICULUM VITAE

1. Biodata

Nama : Hilwa Hawali Irsya
Jenis Kelamin : Perempuan
Tempat, Tanggal Lahir : Cilacap, 28 Oktober 2002
Alamat : Dusun Pulasari RT 05/RW 05
Desa Jambusari, Kecamatan
Jeruklegi, Kabupaten Cilacap,
Jawa Tengah
Email : hilwahawali4@gmail.com
Nomor HP : 082133595129

2. Riwayat Pendidikan

- Tahun 2006-2008 TK Kusuma Wattie
- Tahun 2009-2015 SD Negeri Jambusari 03
- Tahun 2015-2018 SMPIT Ihsanul Fikri Mungkid
- Tahun 2018-2021 SMA Negeri 3 Cilacap
- Tahun 2022-2026 UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta (MATEMATIKA)