

SKRIPSI

**NILAI EIGEN PADA MATRIKS ANTIADJACENCY DARI
GRAF IDENTITAS GRUP SIKLIK ATAS BILANGAN BULAT
BERORDO GENAP**



ATINA PUTRI SHOLIHAH
22106010032
STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2026

**NILAI EIGEN PADA MATRIKS ANTIADJACENCY DARI
GRAF IDENTITAS GRUP SIKLIK ATAS BILANGAN BULAT
BERORDO GENAP**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



diajukan oleh

ATINA PUTRI SHOLIHAH

22106010032

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2026



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Atina Putri Sholihah
NIM : 22106010032
Judul Skripsi : Nilai Eigen pada Matriks Antiadjacency dari Graf Identitas Grup Siklik
atas Bilangan Bulat Berordo Genap

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Yogyakarta, 10 Februari 2026

Pembimbing I

Pembimbing II

Deddy Rahmadi, M.Sc.

NIP. 19930807 202203 1 001

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom.

NIP. 19720423 199903 1 003



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-706/Un.02/DST/PP.00.9/04/2026

Tugas Akhir dengan judul : Nilai Eigen pada Matriks Antiadjacencydari Graf Identitas Grup Siklik
atas Bilangan Bulat Berordo Genap

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : ATINA PUTRI SHOLIAH
Nomor Induk Mahasiswa : 22106010032
Telah diujikan pada : Senin, 23 Februari 2026
Nilai ujian Tugas Akhir : A-

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Deddy Rahmadi, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 69e726a34d64b



Penguji I

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom
SIGNED

Valid ID: 69a6559caf047



Penguji II

Arif Munandar, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 69e6cee5bd87a



Yogyakarta, 23 Februari 2026
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 69e83c80ee20a

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Atina Putri Sholihah
NIM : 22106010032
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 10 Februari 2026



Atina Putri Sholihah

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



*Karya sederhana ini penulis persembahkan untuk:
almamater penulis, kedua orang tua, keluarga penulis, dan seluruh
orang yang menyertai, memberikan semangat, dan mendoakan
penulis dalam kebaikan,
serta penulis sendiri.*

HALAMAN MOTTO



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

"Sesungguhnya Tuhanku bersamaku, Dia akan memberi petunjuk kepadaku"

– QS. Asy-Syu'ara: 62

PRAKATA

Alhamdulillah rabbi' alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Nilai Eigen pada Matriks Antiadjacency dari Graf Identitas Grup Siklik atas Bilangan Bulat Berordo Genap". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Noor Saif Muhammad Mussafi, S.Si., M.Sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
4. Deddy Rahmadi, M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku dosen pembimbing skripsi yang

telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.

6. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.
7. Kedua orang tua dan keluarga penulis yang telah memberikan doa, dukungan moral, dan material yang tiada henti. Segala pengorbanan, kesabaran, dan motivasi yang diberikan menjadi kekuatan utama bagi penulis dalam menempuh pendidikan hingga penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan.
8. Teman-teman Grup Komangs yang telah memberikan dukungan, kebersamaan, serta semangat selama proses perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini. Diskusi, bantuan, dan motivasi yang diberikan turut membantu penulis dalam menghadapi berbagai kendala akademik maupun nonakademik.
9. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung dalam proses penyusunan skripsi baik secara langsung maupun tidak langsung. Bantuan dan dukungan yang diberikan sangat berarti bagi penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 9 Februari 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMBANG	xiii
INTISARI	xiv
ABSTRACT	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	4
1.3. Rumusan Masalah	4
1.4. Tujuan Penelitian	5
1.5. Manfaat Penelitian	5
1.6. Tinjauan Pustaka	6
1.7. Metode Penelitian	8
1.8. Sistematika Penulisan	11
II DASAR TEORI	12

2.1. Matriks	12
2.1.1. Jenis-jenis Matriks	13
2.1.2. Operasi pada Matriks	17
2.1.3. Matriks Blok	24
2.1.4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen	26
2.2. Grup	28
2.2.1. Grup Abelian dan Non-Abelian	30
2.2.2. Grup Siklik	30
2.3. Graf	32
2.3.1. Definisi Graf	32
2.3.2. Adjacent dan Insiden	33
2.3.3. Graf Sederhana	34
2.3.4. Graf Identitas	34
2.3.5. Matriks Adjacency dan Matriks Antiadjacency	35
III Pembahasan	39
3.1. Struktur Blok pada Matriks <i>Adjacency</i> dari Graf Identitas untuk n Genap	39
3.2. Pembentukan Matriks $D = J - A$ sebagai matriks <i>Antiadjacency</i> .	46
3.3. Polinomial Karakteristik dan Nilai Eigen Graf Identitas \mathcal{I}_n	49
IV PENUTUP	58
4.1. Kesimpulan	58
4.2. Saran	59
DAFTAR PUSTAKA	60
Curriculum Vitae	62

DAFTAR TABEL

1.1	Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian	7
-----	--	---



DAFTAR GAMBAR

1.1	Flowchart Metode Penelitian	9
1.2	Subflowchart Pembentukan Graf identitas	10
1.3	Subflowchart Perhitungan Determinan	10
2.1	Graf G secara umum	33
2.2	Graf G untuk menunjukkan <i>adjacent</i> dan insiden	33
2.3	Graf Sederhana	34
2.4	Graf identitas \mathcal{I}_6	35
2.5	Graf G	36
2.6	Graf G	37
3.1	Graf identitas \mathcal{I}_4	40
3.2	Graf identitas \mathcal{I}_6	41
3.3	Graf identitas \mathcal{I}_8	42
3.4	Graf identitas \mathcal{I}_4	45

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR LAMBANG

- \mathbb{Z} : Himpunan bilangan bulat
- \mathbb{Z}_n : Himpunan kelas-kelas sisa modulo n (grup siklik berorde n)
- \mathbb{Z}^* : Himpunan bilangan bulat bukan nol
- \mathbb{R} : Himpunan bilangan real
- \mathbb{R}^n : Ruang vektor berdimensi n atas bilangan real
- λ : Nilai eigen
- \mathcal{G} : Himpunan yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ dan membentuk grup
- ψ : Fungsi insiden suatu graf
- I_n : Graf identitas untuk \mathbb{Z}_n
- \mathcal{I}_n : Graf identitas untuk \mathbb{Z}_n dengan n genap

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

INTISARI

Nilai Eigen pada Matriks Antiadjacency dari Graf Identitas Grup Siklik atas

Bilangan Bulat Berordo Genap

Oleh

Atina Putri Sholihah

22106010032

Graf identitas adalah graf yang dibangun dengan menghubungkan setiap elemen dengan inversnya, sehingga struktur graf yang dihasilkan memiliki pola ketertangan yang simetris yang dapat direpresentasikan melalui matriks *adjacency*. Matriks *antiadjacency* kemudian diperoleh sebagai komplemen terhadap matriks *adjacency* tersebut. Pada penelitian ini dikaji pembentukan umum kedua matriks tersebut dan menurunkan polinomial karakteristik dari matriks *antiadjacency*. Analisis dilanjutkan dengan menentukan nilai-nilai eigen sebagai solusi dari polinomial karakteristik yang diperoleh. Hasil utama dicapai berupa rumus umum polinomial karakteristik beserta nilai eigen yang terkait untuk graf identitas \mathbb{Z}_n dengan n genap.

Kata kunci: Antiadjacency, Graf identitas, Grup Siklik, Nilai Eigen Polinomial Karakteristik.

ABSTRACT

Eigenvalues of the Antiadjacency Matrix of the Identity Graph of a Cyclic

Group over Even Integers

By

Atina Putri Sholihah

22106010032

An identity graph is a graph constructed by connecting each element with its invers, so that the resulting graph structure has a symmetric adjacency pattern that can be represented by an adjacency matrix. The antiadjacency matrix is the obtained as the complement to the adjacency matrix. In this study, the general formation of both matrices is studied and the characteristic polynomial of the antiadjacency matrix is derived. The analysis continues by determining the eigenvalues as solutions of obtained characteristic polynomial. The main result is a general formula for the characteristic polynomial and its associated eigenvalues for the identity graph \mathbb{Z}_n with even n .

Keyword: Antiadjacency, Characteristic Polynomial, Cyclic Group, Eigenvalues, Identity Graph.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan cabang dalam matematika diskrit yang berkembang pesat dan diperkenalkan oleh Euler pada tahun 1736. Euler berhasil memecahkan permasalahan jembatan di Kota Königsberg menggunakan konsep graf (Daniel & Taneo, 2019). Saat ini, teori graf telah menjadi alat analisis yang banyak digunakan dalam pemodelan struktur diskrit dan jaringan. Teori graf dapat diaplikasikan dalam berbagai ilmu pengetahuan seperti kimia, biologi, fisika, dan juga ilmu komputer.

Sejalan dengan perkembangan teori graf, lahirlah cabang kajian yang dikenal sebagai teori graf spektral, yaitu bidang yang mempelajari hubungan antara struktur graf dengan nilai eigen dari matriks representasinya. Dalam aljabar linear, nilai eigen adalah konsep yang menggambarkan sifat khas suatu transformasi yang berkembang dari kajian gerak rotasi dan dikembangkan dalam studi matriks dan berbagai aplikasi ilmiah (Anton & Kaul, 2019). Oleh karena itu, karakteristik spektral dari matriks yang berkaitan dengan graf mampu memberikan informasi mengenai struktur graf, khususnya dalam menggambarkan keterhubungan, sifat ekspansi, dan ketahanan struktur graf (Kumar et al., 2025). Secara aljabar, nilai eigen suatu matriks berkaitan dengan polinomial karakteristik yang merepresentasikan sifat spektral matriks yang bersesuaian. Pendekatan spektral ini menunjukkan bahwa banyak fenomena graf yang bersifat kombinatorial dapat dijelaskan secara lebih mendalam melalui analisis spektrum nilai eigen dari matriks representasinya

(Nica, 2018).

Dalam teori graf spektral, struktur graf direpresentasikan melalui beberapa jenis matriks, di antaranya matriks *adjacency* dan matriks *Laplacian*. Selain kedua matriks tersebut, variasi lain seperti matriks *antiadjacency* juga dapat digunakan untuk memberikan perspektif berbeda mengenai struktur graf, terutama ketika simpulnya tidak saling bertetangga, sehingga memberikan perspektif struktural yang berbeda dalam analisis graf. Analisis spektral dilakukan dengan merepresentasikan struktur graf ke dalam matriks *antiadjacency*, sehingga sifat aljabar graf tersebut dapat dikaji melalui spektrum nilai eigen.

Salah satu perluasan dari pendekatan spektral tersebut adalah merepresentasikan struktur aljabar, khususnya grup, dalam bentuk graf. Dalam penelitian ini dipilih grup siklik karena merupakan struktur grup yang paling fundamental dan memiliki pola elemen serta invers yang teratur, sehingga memungkinkan pembentukan graf identitas dengan struktur yang simetris dan dapat dianalisis secara spektral. Dalam kajian ini digunakan graf identitas, yaitu graf yang dibentuk berdasarkan hubungan elemen-elemen grup dengan elemen identitasnya. Graf identitas dipilih karena struktur keterhubungannya secara khusus ditentukan oleh relasi elemen grup dengan elemen identitas, sehingga berbeda secara struktural dari graf pada grup lainnya. Sebagai representasi awal dari struktur keterhubungan tersebut, matriks *adjacency* digunakan untuk menggambarkan pola hubungan antar elemen pada graf identitas grup siklik \mathbb{Z}_n , yang memiliki bentuk umum tertentu akibat struktur graf pada kasus n genap yang teratur. Representasi graf memungkinkan berbagai sifat aljabar seperti elemen yang invers terhadap dirinya sendiri, subgrup, dan struktur internal lainnya untuk diamati langsung melalui pola keterhubungan pada graf. Studi sebelumnya juga menampilkan banyak contoh grup yang direpresenta-

sikan sebagai graf untuk menunjukkan konsistensi pendekatan ini (Kandasamy & Smarandache, 2009). Oleh karena itu, penelitian ini difokuskan pada graf identitas dari grup siklik \mathbb{Z}_n dengan n genap, karena struktur graf yang teratur pada kasus ini memungkinkan analisis spektral yang lebih jelas melalui matriks *antiadjacency*. Dalam penelitian ini, graf identitas direpresentasikan ke dalam matriks *antiadjacency* untuk dianalisis secara aljabar melalui spektrum nilai eigennya. Kondisi tersebut berkaitan dengan adanya elemen dalam \mathbb{Z}_n yang merupakan invers terhadap dirinya sendiri, yang membentuk pola struktur graf yang khas.

Meskipun teori graf spektral telah banyak dipelajari melalui representasi matriks seperti matriks *adjacency* dan *Laplacian*, penelitian terkait penggunaan matriks *antiadjacency* sebagai pendekatan alternatif masih terbatas dalam literatur. Beberapa penelitian terkini mulai menunjukkan bahwa matriks *antiadjacency* dapat memberikan perspektif berbeda dalam menganalisis struktur dan sifat spektral suatu graf, khususnya dalam konteks ketidakberketetapan antar simpul. Kajian spektral oleh (Wang et al., 2023) yang dilakukan pada matriks *antiadjacency* mengindikasikan adanya keterkaitan antara spektrum eigen dan sifat struktural graf.

Namun demikian, kajian spektral secara khusus membahas matriks *antiadjacency* pada graf identitas yang dibangun atas grup siklik \mathbb{Z}_n terutama pada kasus n genap masih sangat terbatas. Secara khusus, belum tersedia formulasi eksplisit untuk polinomial karakteristik dan nilai eigen pada konteks tersebut, sehingga diperlukan kajian untuk memperoleh bentuk eksplisit polinomial karakteristik dari matriks *antiadjacency* graf identitas pada grup siklik \mathbb{Z}_n untuk n genap. Oleh karena itu, penelitian ini diarahkan untuk mengisi kekosongan tersebut dengan memberikan bentuk eksplisit polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks *antiadjacency* graf identitas pada grup \mathbb{Z}_n , sehingga dapat memperkaya kajian teori

graf spektral pada struktur aljabar. Selain itu, penelitian ini juga mengkaji penentuan nilai-nilai eigen matriks *antiadjacency* yang diperoleh melalui penyelesaian polinomial karakteristik tersebut.

1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada skripsi ini adalah pembahasan mengenai polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks *antiadjacency* pada graf identitas. Graf yang dikaji dibatasi pada graf identitas yang berasal dari grup siklik \mathbb{Z}_n dengan n genap. Analisis dilakukan terhadap struktur matriks *adjacency* dan matriks *antiadjacency* yang dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks blok. Pembahasan dibatasi pada konsep dasar grup siklik, graf identitas, serta teori matriks blok, sebagai dasar dalam memperoleh polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks *antiadjacency*.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk umum matriks *adjacency* dari graf identitas pada grup siklik \mathbb{Z}_n untuk n genap?
2. Bagaimana bentuk umum matriks *antiadjacency* dari graf identitas pada grup siklik \mathbb{Z}_n untuk n genap?
3. Bagaimana polinomial karakteristik yang dihasilkan oleh matriks *antiadjacency* dari graf identitas grup siklik \mathbb{Z}_n untuk n genap?
4. Bagaimana cara menentukan nilai-nilai eigen dari matriks *antiadjacency* tersebut melalui penyelesaian polinomial karakteristiknya?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari bentuk umum matriks *adjacency* dari graf identitas dari grup siklik \mathbb{Z}_n untuk n genap.
2. Mempelajari bentuk umum matriks *antiadjacency* dari graf identitas grup siklik \mathbb{Z}_n dengan n genap.
3. Menentukan polinomial karakteristik dari matriks *antiadjacency* graf identitas grup siklik \mathbb{Z}_n dengan n genap.
4. Menentukan nilai-nilai eigen dari matriks *antiadjacency* melalui penyelesaian polinomial karakteristik yang diperoleh.

1.5. Manfaat Penelitian

Secara teoritis, penelitian ini diharapkan dapat memperkaya kajian teori graf spektral, khususnya pada representasi graf identitas yang dibangun dari grup siklik \mathbb{Z}_n untuk n genap. Hasil penelitian ini memberikan formulasi eksplisit polinomial karakteristik dan nilai-nilai eigen dari matriks *antiadjacency*. Hasil ini memberikan kontribusi dalam pengembangan analisis spektral yang berbasis struktur aljabar grup.

Secara praktis, hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai referensi akademik dalam penelitian lanjutan yang berkaitan dengan graf berbasis grup dan analisis spektralnya. Selain itu, formulasi matriks dan pendekatan perhitungan spektrum yang diperoleh dapat dimanfaatkan sebagai contoh konkret dalam pembelajaran teori graf spektral dan aljabar linear, serta sebagai acuan dalam pengembangan metode analisis spektral pada graf dengan struktur khusus aljabar.

1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan skripsi ini bersumber dari buku, makalah, jurnal, dan skripsi.

1. Penelitian karya Ganesha Lapenangga Putra (2024) dengan judul **Characteristic Polynomial and Eigenvalues of Anti-adjacency Matrix for Graph $K_m \odot K_1$ and $H_m \odot K_1$** membahas tentang memperoleh bentuk umum polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks *antiadjacency* graf hasil operasi korona antara graf lengkap dan graf trivial.
2. Penelitian karya Wahri Irawan dan Kiki Ariyanti Sugeng (2022) dengan judul **Characteristic Antiadjacency Matrix of Graph Join** membahas tentang memperoleh bentuk umum polinomial karakteristik dari matriks *antiadjacency* pada operasi join suatu graf.
3. Penelitian karya D. Diwyacitta, A. P. Putra, K. A. Sugeng, dan S. Utama (2017) dengan judul **The Determinant of an Antiadjacency Matrix of a Directed Cycle Graph with Chords** membahas tentang perhitungan determinan pada matriks *antiadjacency* untuk graf siklik berarah dengan tambahan sisi (*chord*) menggunakan pendekatan aljabar linear.
4. Penelitian karya Juan Daniel, Kiki Ariyanti Sugeng, dan Nora Hariadi (2022) dengan judul **Eigenvalues of Antiadjacency Matrix of Cayley Graph of \mathbb{Z}_n** membahas tentang penentuan nilai eigen dari matriks *antiadjacency* untuk graf Cayley yang dibangun atas grup siklik \mathbb{Z}_n dan suatu himpunan S .

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah dibahas sebelumnya, dapat dilihat bahwa kajian mengenai polinomial karakteristik, nilai eigen, serta struktur matriks representasi pada berbagai jenis graf telah dikembangkan melalui beragam pendekatan.

Masing-masing penelitian memberikan kontribusi berbeda, baik dari sisi objek graf yang dikaji maupun metode analisis yang digunakan. Untuk memberikan gambaran yang lebih sistematis mengenai keterkaitan penelitian terdahulu dengan penelitian ini, berikut disajikan tabel yang memuat persamaan dan perbedaan masing-masing penelitian dengan fokus penelitian yang sedang dilakukan penulis.

Tabel 1.1 Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian

No	Judul (Tahun)	Penulis	Persamaan	Perbedaan
1	<i>Characteristic Polynomial and Eigenvalues of Anti-adjacency Matrix for Graph $K_m \odot K_1$ and $H_m \odot K_1$ (2024)</i>	Ganesha Lape-nangga Putra	Polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks <i>antiadjacency</i> .	Menggunakan graf identitas pada grup siklik \mathbb{Z}_n dengan kasus khusus pada n genap.
2	<i>Characteristic Antiadjacency Matrix of Graph Join (2022)</i>	Wahri Irawan dan Kiki Ariyanti Suing	Polinomial karakteristik dari matriks <i>antiadjacency</i>	Menggunakan graf identitas pada grup siklik atas bilangan bulat genap.

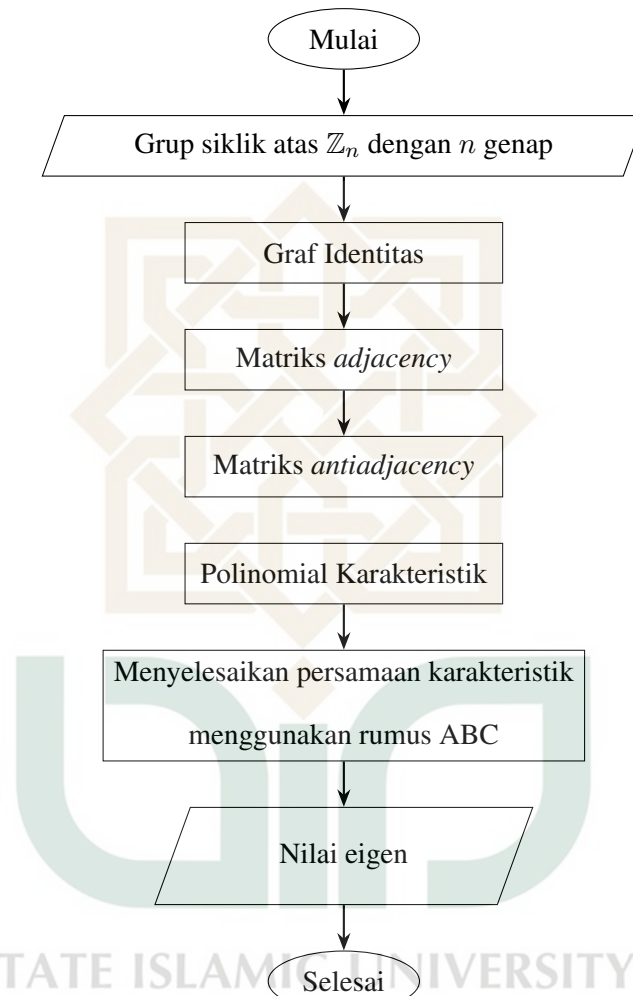
3	<i>The Determinant of an Antiadjacency Matrix of a Directed Cycle Graph with Chords</i> (2017)	D. Diwyacitta, A. P. Putra, K. A. Sugeng, dan S. Utama	Menggunakan pendekatan aljabar linear dalam pembahasan matriks <i>antiadjacency</i> dan determinan dalam mencari karakteristik suatu graf.	Menentukan polinomial karakteristik beserta nilai eigen dari matriks <i>antiadjacency</i> pada graf identitas atas grup siklik \mathbb{Z}_n berorde genap.
4	<i>Eigenvalues of Antiadjacency Matrix of Cayley Graph of \mathbb{Z}_n</i> (2022)	Juan Daniel, Kiki Ariyanti Sugeng, dan Nora Hariadi	Membahas spektrum dari matriks <i>antiadjacency</i> atas grup siklik \mathbb{Z}_n .	Graf yang digunakan adalah graf identitas dan secara khusus membahas grup siklik \mathbb{Z}_n untuk n genap.

1.7. Metode Penelitian

Pada penelitian ini penulis menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal terkait topik penelitian yaitu; konsep dasar matriks *adjacency*, grup siklik \mathbb{Z}_n , dan graf identitas. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

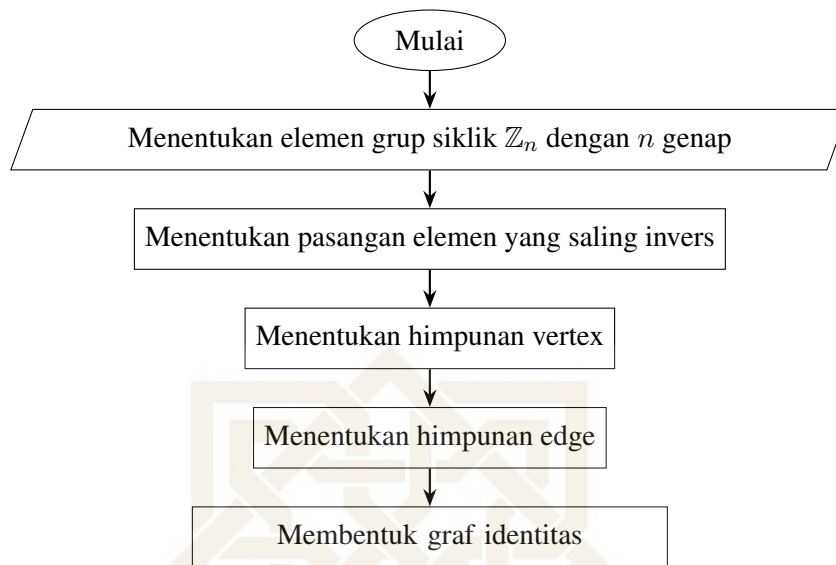
1. Membahas konsep dasar dari matriks, grup, dan graf.
2. Membahas konsep dasar graf dari grup siklik \mathbb{Z}_n .
3. Membahas konsep dasar struktur blok dari matriks *adjacency*.
4. Membahas konsep dasar matriks *antiadjacency*.

5. Membahas polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks *antiadjacency* dari grup siklik \mathbb{Z}_n .



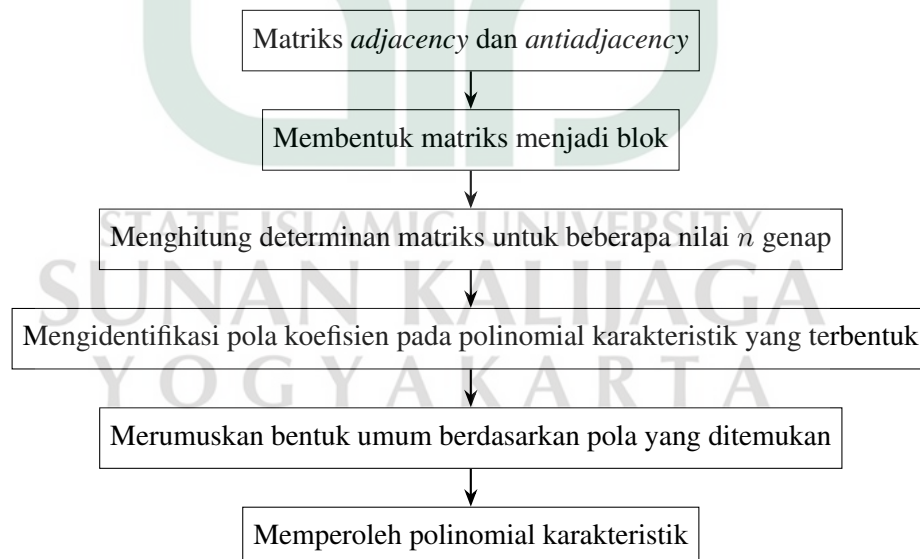
Gambar 1.1 Flowchart Metode Penelitian

Tahapan penelitian secara umum digambarkan pada 1.1. Salah satu langkah dalam diagram tersebut adalah pembentukan graf identitas dari grup siklik. Penjelasan lebih mendalam mengenai langkah-langkah teknis dalam mengonstruksi graf tersebut disajikan secara rinci melalui *subflowchart* berikut.



Gambar 1.2 Subflowchart Pembentukan Graf identitas

Tahapan penentuan polinomial karakteristik ini dilakukan dengan analisis induktif dengan mengamati pola determinan matriks pada berbagai ukuran n genap. Proses tersebut digambarkan secara rinci pada subflowchart berikut.



Gambar 1.3 Subflowchart Perhitungan Determinan

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab, yaitu sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas landasan teori yang meliputi konsep dasar matriks, grup siklik \mathbb{Z}_n , graf, serta pengantar mengenai matriks adjacency, matriks *antiadjacency*, dan teori spektral graf yang menjadi dasar analisis penelitian.
- BAB 3** : Bab ini menjelaskan mengenai konstruksi graf identitas pada grup siklik \mathbb{Z}_n untuk n genap, membangun bentuk matriks *antiadjacency* yang sesuai, serta menurunkan polinomial karakteristik dan menentukan nilai-nilai eigen dari matriks tersebut.
- BAB 4** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

PENUTUP

Bab penutup ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bentuk umum matriks *adjacency* untuk graf identitas pada grup siklik \mathbb{Z}_n dengan n genap dapat dinyatakan dalam susunan blok yang mencerminkan pola ketetanggaan antar elemen grup. Matriks ini tersusun secara simetris dan memperlihatkan pembagian elemen \mathbb{Z}_n ke dalam dua kelompok berdasarkan relasi identitasnya, sehingga matriks *adjacency* dapat ditulis sebagai bentuk blok:

$$A(\mathcal{I}_n) = \begin{bmatrix} B & C \\ C^T & 0_k \end{bmatrix},$$

dengan B adalah matriks *adjacency* untuk $V_1 = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, dan C adalah matriks *adjacency* untuk $V_2 = \{k, k+1, k+2, \dots, n-1\}$

2. Matriks *antiadjacency* yang diperoleh pun memiliki susunan blok yang teratur. Matriks ini memberikan entri 1 pada pasangan verteks yang tidak bertetanggaan dalam graf identitas dan 0 pada pasangan yang bertetangga. Dengan memanfaatkan partisi elemen grup siklik berorde genap, maka blok matriks

antiadjacency dapat ditulis sebagai

$$D(\mathcal{I}_n) = \begin{bmatrix} J_{11} - B & J_{12} - C \\ J_{21} - C^T & J_{22} - 0_k \end{bmatrix},$$

dengan J adalah matriks dengan semua elemen bernilai 1.

3. Berdasarkan pola matriks *antiadjacency* tersebut, polinomial karakteristiknya dapat dihitung melalui determinan yang menghasilkan rumus umum:

$$P_D(\lambda) = (\lambda - 1)^k (\lambda + 1)^{k-2} (\lambda^2 - (n - 2)\lambda - 1).$$

4. Nilai-nilai eigen selanjutnya diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik tersebut. Hasil akhirnya adalah $\lambda = 1$ (multiplisitas k), $\lambda = -1$ (multiplisitas $k - 2$), dan terdapat dua nilai eigen lain yang merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat

$$\lambda^2 - (n - 2)\lambda - 1 = 0,$$

untuk $n = 2k$ dan dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda_{\pm} = (k - 1) \pm \sqrt{(k - 1)^2 + 1}.$$

4.2. Saran

Saran yang akan penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini hanya difokuskan pada graf identitas grup siklik bilangan bulat. Pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan pada graf identitas pada jenis grup lain yang lebih kompleks.
2. Penelitian selanjutnya dapat memperluas kajian terhadap sifat-sifat spektral lainnya dari matriks *antiadjacency*, seperti distribusi spektrum, atau keterkaitan dengan struktur kombinatorial graf.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. & Kaul, A. (2019). *Elementary Linear Algebra*. Wiley, ISBN: 9781119268048, <https://books.google.co.id/books?id=REiYDwAAQBAJ>.
- Bapat, R. B. (2014). *Graphs and matrices*. Springer.
- Bondy, J. A., Murty, U. S. R., et al. (1976). *Graph theory with applications*, volume 290. Macmillan London.
- Brouwer, A. E. & Haemers, W. H. (2011). *Spectra of graphs*. Springer Science & Business Media.
- Daniel, F. & Taneo, P. N. (2019). *Teori Graf*. Deepublish.
- Daniel, J., Sugeng, K. A., & Hariadi, N. (2022). Eigenvalues of antiadjacency matrix of cayley graph of $z.n$. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 6(1):66–76.
- Diestel, R. (2017). *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Berlin, Germany, 5 edition, ISBN: 978-3-662-53621-6, DOI: 10.1007/978-3-662-53622-3.
- Diwyacitta, D., Putra, A., Sugeng, K., & Utama, S. (2017). The determinant of an antiadjacency matrix of a directed cycle graph with chords. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1862, page 030127. AIP Publishing LLC.
- Fraleigh, J. B. (2003). *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India.
- Gallian, J. (2021). *Contemporary abstract algebra*. Chapman and Hall/CRC.

- Horn, R. A. & Johnson, C. R. (2013). *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2 edition.
- Irawan, W. & Sugeng, K. A. (2022). Characteristic antiadjacency matrix of graph join. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(1):041–046.
- Kandasamy, W. & Smarandache, F. (2009). Groups as graphs. *arXiv preprint arXiv:0906.5144*.
- Kumar, J. S., Archana, B., Muralidharan, K., & Srija, R. (2025). Spectral graph theory: Eigen values laplacians and graph connectivity. *Metallurgical and Materials Engineering*, 31(3):78–84.
- Magpantay, D. M. & Jagmis, J. M. (2025). Middle graph of the identity graph of finite cyclic and dihedral groups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 18(2):5499–5499.
- Nica, B. (2018). *A brief introduction to spectral graph theory*, volume 3. European Mathematical Society Zürich.
- Putra, G. L. (2024). Characteristic polynomial and eigenvalues of anti-adjacency matrix for graph $k_m \odot k_1$ and $h_m \odot k_1$. *SITEKIN: Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, 21(2):357–361.
- Wang, J., Lei, X., Lu, M., Sorgun, S., & Küçük, H. (2023). On graphs with exactly one anti-adjacency eigenvalue and beyond. *Discrete Mathematics*, 346(6):113373.