SKRIPSI

TITIK TETAP BERSAMA PADA PEMETAAN KONTRAKTIF-(θ, τ) DAN KONTRAKTIF-(ψ, τ) DI RUANG METRIK LENGKAP

TRI MAULIANA NINGSIH

22106010006

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2026

TITIK TETAP BERSAMA PADA PEMETAAN KONTRAKTIF-(θ, τ) DAN KONTRAKTIF-(ψ, τ) DI RUANG METRIK LENGKAP

Skripsi
Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika

diajukan oleh
TRI MAULIANA NINGSIH
22106010006

Kepada
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2026

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir
Lamp : -

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Tri Mauliana Ningsih
NIM	: 22106010006
Judul Skripsi	: Titik Tetap Bersama pada Pemetaan Kontraktif-(θ, τ) dan Kontraktif-(ψ, τ) di Ruang Metrik Lengkap.

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 25 Mei 2026

Pembimbing I

Aulia Khifah Futhona, M.Sc.
NIP.19920605 201903 2 021

Pembimbing II

Malahayati, S.Si., M.Sc
NIP.19840412 201101 2 010

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1293/Un.02/DST/PP.00.9/06/2026

Tugas Akhir dengan judul	: Titik Tetap Bersama pada Pemetaan Kontraktif-(□, □) dan Kontraktif -(□, □) di Ruang Metrik Lengkap.

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama	: TRI MAULIANA NINGSIH
Nomor Induk Mahasiswa	: 22106010006
Telah diujikan pada	: Kamis, 04 Juni 2026
Nilai ujian Tugas Akhir	: A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Aulia Khifah Futhona, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 6a28dadeac9b8

Penguji I

Malahayati, S.Si., M.Sc
SIGNED

Valid ID: 6a28f7cf593d6

Penguji II

Prof. Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6a28dc38d8cd5

Yogyakarta, 04 Juni 2026
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6a2926915d642

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Tri Mauliana Ningsih
NIM	: 22106010006
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 25 Mei 2026

METERAI TEMPEL
3A06EAOX015325754

Tri Mauliana Ningsih

HALAMAN PERSEMBAHAN

Tugas akhir ini saya persembahkan untuk keluarga, diri sendiri, dan almamater Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga

HALAMAN MOTTO

Hiduplah dengan semangat *carpe diem*.

PRAKATA

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji dan syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat, karunia, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "Titik Tetap Bersama pada Pemetaan Kontraktif-(θ, τ) dan Kontraktif-(ψ, τ) di Ruang Metrik lengkap". Tugas akhir ini disusun sebagai salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Matematika.

Dalam penyusunan tugas akhir ini, penulis menyadari adanya berbagai kendala dan kesulitan yang dihadapi. Namun, berkat dukungan, bimbingan, motivasi, serta doa dari berbagai pihak, *alhamdulillah* tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta dan juga selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan arahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.

2. Ibu Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.

3. Ibu Aulia Khifah Futhona, M.Sc. dan Ibu Malahayati, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing skripsi yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk memberikan bimbingan kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.

4. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang memberikan ilmu bermanfaat serta memberikan pelayanan administrasi akademik.
5. Keluarga yang selalu memberikan dukungan dalam berbagai bentuk.
6. Diri sendiri yang telah berusaha untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Teman-teman yang selalu menemani selama proses perkuliahan, khususnya Alya, Sinta, Alin, Nafisa, Nila, Derrida, Laila, dan Tarisha.
8. Teman-teman analisis yang saling mendukung selama proses pengerjaan skripsi khususnya Mauliya dan Amalia.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, yang secara langsung maupun tidak langsung membantu serta memberikan dukungan selama penyusunan tugas akhir ini.

Penulis berharap tugas akhir ini dapat memberikan kontribusi positif serta menambah pengetahuan bagi para pembaca. Selain itu, penulis berharap tugas akhir ini dapat menjadi dasar untuk pengembangan kajian yang lebih mendalam pada bidang terkait. Penulis terbuka terhadap kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan karya ini.

Yogyakarta, 24 Mei 2026

Tri Mauliana Ningsih

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{R}$	:	Himpunan semua bilangan real
$\mathbb{R}^+$	:	Himpunan semua bilangan real positif
$\mathbb{N}$	:	Himpunan semua bilangan asli
$\lvert a \rvert$	:	Nilai mutlak a
$a \in \mathbb{R}$	:	a anggota $\mathbb{R}$
$S \subseteq \mathbb{R}$	:	S himpunan bagian atau sama dengan $\mathbb{R}$
$F : X \to X$	:	Pemetaan F dari X ke X
$a \Rightarrow b$	:	Jika a maka b
$\Leftrightarrow$	:	Jika dan hanya jika
$\{x_n\}$	:	Barisan x_n
$F^n x$	:	Komposisi pemetaan F sebanyak n kali di titik x
ε, δ	:	Epsilon, Delta
ψ, τ, θ	:	Psi, Tau, Theta
sup, inf	:	Supremum, Infimum
lim sup, lim inf	:	Limit superior, Limit inferior
$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j$	:	Penjumlahan dari $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$
$\prod_{j=1}^{N} \alpha_j$	:	Perkalian dari $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_N$
$\blacksquare$	:	Akhir suatu bukti

INTISARI

Titik Tetap Bersama pada Pemetaan Kontraktif-(θ, τ) dan Kontraktif-(ψ, τ) di Ruang Metrik lengkap

Oleh

TRI MAULIANA NINGSIH

22106010006

Titik tetap bersama merupakan pembahasan mengenai eksistensi suatu titik tetap terhadap dua pemetaan atau lebih. Eksistensi serta ketunggalan titik tetap bersama dapat diperoleh apabila pemetaan yang diberikan memenuhi kondisi tertentu di ruang metrik lengkap. Skripsi ini menganalisis ketunggalan titik tetap bersama pada dua pemetaan yang memenuhi syarat kontraktif- (θ, τ) dan kontraktif-(ψ, τ) di ruang metrik lengkap dengan asumsi bahwa pemetaannya reguler secara asimtotik serta kontinu-q atau kontinu secara orbit. Pada bagian akhir skripsi ini, diberikan contoh untuk memberikan ilustrasi hasil analisis yang telah diperoleh.

Kata kunci: kontraktif-(θ, τ), kontraktif-(ψ, τ), ruang metrik lengkap, titik tetap bersama.

ABSTRACT

Common Fixed Points in the Mapping of the Contractive -(θ, τ) and Contractive -(ψ, τ) on a Complete Metric Space

By

TRI MAULIANA NINGSIH

22106010006

A common fixed point is a concept concerning the existence of a fixed point for two or more mappings. The existence and uniqueness of a common fixed point can be established if the given mappings satisfy certain conditions in a complete metric space. This thesis analyzes the uniqueness of a common fixed point for two mappings that satisfy the contractive- (θ, τ) and contractive-(ψ, τ) conditions in a complete metric space, assuming that the mappings are asymptotically regular and q-continuous or orbit-continuous. In the final section of this thesis, examples are provided to illustrate the results of the analysis.
Keywords: contractive-(θ, τ), contractive-(ψ, τ), complete metric space, common fixed point.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pendidikan yang erat kaitannya dengan perhitungan. Perhitungan yang sudah dipelajari kemudian akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam berbagai bidang kehidupan seperti ekonomi, statistik, dan masih banyak lagi. Matematika tidak hanya mengajarkan perhitungan di dalamnya, namun terdapat hal penting yang dimiliki oleh seseorang yang mempelajarinya, yaitu kemampuan berfikir logis dan analitis. Kemampuan ini sangat penting bagi setiap manusia, mengingat dalam menjalani kehidupan pasti dihadapkan pada pilihan dan permasalahan yang silih berganti. Hal tersebut mengharuskan manusia untuk lebih memahami makna kehidupan dan mengapa manusia diciptakan. Hal ini tercantum dalam Q.S Al-‘Ankabut (29) Ayat 19 yang berbunyi :

أَوَلَمْ يَرَوْا كَيْفَ يُبْدِئُ اللَّهُ الْخَلْقَ ثُمَّ يُعِيدُهُ ۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى اللَّهِ يَسِيرٌ

Artinya: *"Apakah mereka tidak memperhatikan bagaimana Allah memulai penciptaan (makhluk), kemudian mengembalikannya (menghidupkannya lagi)? Sesungguhnya yang demikian itu mudah bagi Allah."*(Kementerian Agama RI, 2026).

Ayat di atas menjelaskan bahwa Allah SWT menciptakan manusia dari awal lahir ke dunia sampai meninggal. Kemudian akan dibangkitkan lagi pada hari kebangkitan. Pemahaman terhadap makna hidup dengan sebaik-baiknya perlu dimiliki oleh setiap orang agar termasuk golongan yang memperoleh keberuntungan pada hari pembalasan kelak. Oleh karena itu, kemampuan berfikir logis dan analitis sangat diperlukan agar terhindar dari kesalahan di kemudian hari.

Berfikir logis dan analitis mempunyai peran penting dalam bidang matematika untuk menyelesaikan berbagai permasalahan secara terstruktur. Salah satu permasalahan dalam matematika khususnya di bidang analisis adalah teori titik tetap. Teori titik tetap merupakan salah satu pilar fundamental dalam cabang ilmu matematika analisis fungsional. Teorema klasik yang mendasari teori ini adalah prinsip kontraksi Banach, yang menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik lengkap yang dilengkapi dengan suatu pemetaan kontraktif. Penerapan prinsip kontraksi Banach dalam perkembangannya, memiliki batasan ketika diterapkan pada pemetaan majemuk. Oleh karena itu, para matematikawan memperluas kajian tersebut ke dalam teori titik tetap bersama *(common fixed point theory)*. Permasalahan utama dalam teori ini adalah mencari kondisi-kondisi syarat cukup (seperti jenis pemetaan kontraktif yang digunakan) yang menjamin agar dua atau lebih pemetaan secara simultan memiliki satu titik tetap yang sama. Diantaranya Khan dan Oyentubi (2020) yang membahas pengembangan teori titik tetap bersama untuk dua pemetaan pada ruang metrik lengkap. Khan dan Oyentubi (2020) memperluas konsep pemetaan kontraktif klasik yang melibatkan dua pemetaan sekaligus dengan tambahan parameter pengontrol. Selanjutnya, dalam skripsi ini pemetaan tersebut dinamakan pemetaan kontraktif-(θ, τ). Pemetaan kontraktif-(θ, τ) ini merupakan generalisasi kontraksi yang tetap mengontrol jarak hasil pemetaan, tetapi memberi toleransi melalui suku tambahan yang bergantung pada kedekatan titik dengan pemetaannya sendiri. Selain itu, Huang dan Qian (2022) meneliti eksistensi titik tetap bersama untuk sepasang pemetaan tanpa asumsi bahwa koefisien kontraktifnya tetap dan kurang dari 1 dengan menggunakan suatu fungsi $\psi \in \mathcal{S}$ yang dikenalkan oleh Geraghty (1973). Selanjutnya, dalam skripsi ini pemetaan tersebut dinamakan pemetaan kontraktif-(ψ, τ).

Konsep titik tetap sangat menarik untuk dibahas karena banyak diterapkan dalam berbagai bidang. Salah satu penerapannya adalah pada penyelesaian sistem persamaan fungsional dalam *dynamic programming* yang merupakan suatu metode untuk menyelesaikan masalah optimasi melalui pemecahan masalah yang lebih sederhana seperti yang dibahas pada Sarwar et al., (2015). Selain itu, teori titik tetap bersama digunakan dalam ekonomi dan teori keseimbangan yang dibahas oleh Nash (1950). Walaupun tidak selalu disebut *common fixed point*, akan tetapi konsepnya sangat dekat karena melibatkan beberapa pilihan strategi.

Teori titik tetap bersama banyak menggunakan ruang metrik karena ruang tersebut dapat digunakan untuk mengkaji kekonvergenan barisan dan sifat kontraktif suatu pemetaan. Oleh karena itu, penelitian ini akan bekerja di suatu ruang metrik. Ruang metrik merupakan himpunan tak kosong dan dilengkapi suatu metrik yang memenuhi aksioma nonnegativitas, kesamaan, simetri, dan ketaksamaan segitiga.

Berdasarkan uraian di atas, skripsi ini membahas ketunggalan titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(θ, τ) dan kontraktif-(ψ, τ) di ruang metrik lengkap. Selanjutnya, penelitian ini mengkaji kedua jenis pemetaan tersebut berdasarkan sifat kontraktifnya sebagai bentuk perluasan dari kontraksi klasik. Selain itu, akan disajikan beberapa contoh untuk menunjukkan bahwa hasil yang diperoleh merupakan generalisasi dari hasil-hasil sebelumnya.

1.2. Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, batasan masalah pada skripsi ini mencakup titik tetap bersama dari dua pemetaan yang kontraktif-(θ, τ) dan kontraktif-(ψ, τ) di ruang metrik lengkap. Batasan masalah dalam skripsi ini dibuat untuk menghindari perluasan objek yang akan dibahas.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telat dipaparkan sebelumnya, maka rumusan masalah dalam penelitian ini, yaitu sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis ketunggalan titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(θ, τ)?
2. Bagaimana analisis ketunggalan titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(ψ, τ)?
3. Bagaimana aplikasi titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(θ, τ) dan kontraktif-(ψ, τ)?

1.4. Tujuan Penelitian

Penyusunan penelitian ini memiliki beberapa tujuan, yaitu sebagai berikut:

1. Menganalisis ketunggalan titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(θ, τ).
2. Menganalisis ketunggalan titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(ψ, τ).
3. Menunjukkan aplikasi titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(θ, τ) dan kontraktif-(ψ, τ).

1.5. Manfaat Penelitian

Penyusunan penelitian ini diharapkan memberikan beberapa manfaat, yaitu sebagai berikut:

1. Memberikan pandangan mengenai ketunggalan titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(θ, τ).
2. Memberikan pandangan mengenai ketunggalan titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(ψ, τ).
3. Memberikan pemahaman mengenai aplikasi titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(θ, τ) dan kontraktif-(ψ, τ).

1.6. Tinjauan Pustaka

Penelitian ini bermula dari definisi pemetaan kontraktif dalam *"Introductory Functional Analysis with Applications"*(Kreyszig, 1978). Dalam mencari titik tetap suatu pemetaan ke dirinya sendiri dan kontraktif dalam ruang metrik lengkap, digunakan prinsip kontraksi Banach dalam *"Fixed Point Theory in Metric Spaces"* (Agarwal et al., 2018). Selain itu, diberikan definisi pemetaan Kannan pada *"Fixed Point Theorems for Kannan-type Maps"* (Ume, 2015). Kemudian *"The Solution by Iteration of Nonlinear Functional Equations in Banach Spaces"* (Browder & Petryshyn, 1966) memperkenalkan konsep reguler secara asimtotik untuk memperoleh titik tetap untuk kondisi pemetaan yang lebih lemah. Di dalam *"Ljubomir B. Ćirić (1935-2016)"* (Aranđelović & Mateljević, 2017) dan *"Fixed Points and Continuity of Contractive Maps"* (Pant & Pant, 2017) diperkenalkan definisi kontinu secara orbit dan kontinu-q. Dengan memperlemah kondisi dari kontinu menjadi kontinu secara orbit-atau kontinu-q, *"Remarks on Asymptotic Regularity and Fixed Poin-*

ts" (Górnicki, 2019) menunjukkan bahwa suatu pemetaan masih bisa memiliki titik tetap.

Selanjutnya, di dalam *"On some Mappings with a Unique Common Fixed Point"*(Khan & Oyetunbi, 2020) menjamin ketunggalan titik tetap bersama dari dua pemetaan yang kontraktif-(θ, τ). Kemudian, Geraghty pada *"On Contractive Mapping"* (Geraghty, 1973) memperkenalkan suatu kelas uji fungsi yang dinamakan dengan fungsi $\psi \in \mathcal{S}$, sehingga dapat dijamin ketunggalan titik tetap bersama dari dua pemetaan kontraktif-(ψ, τ).

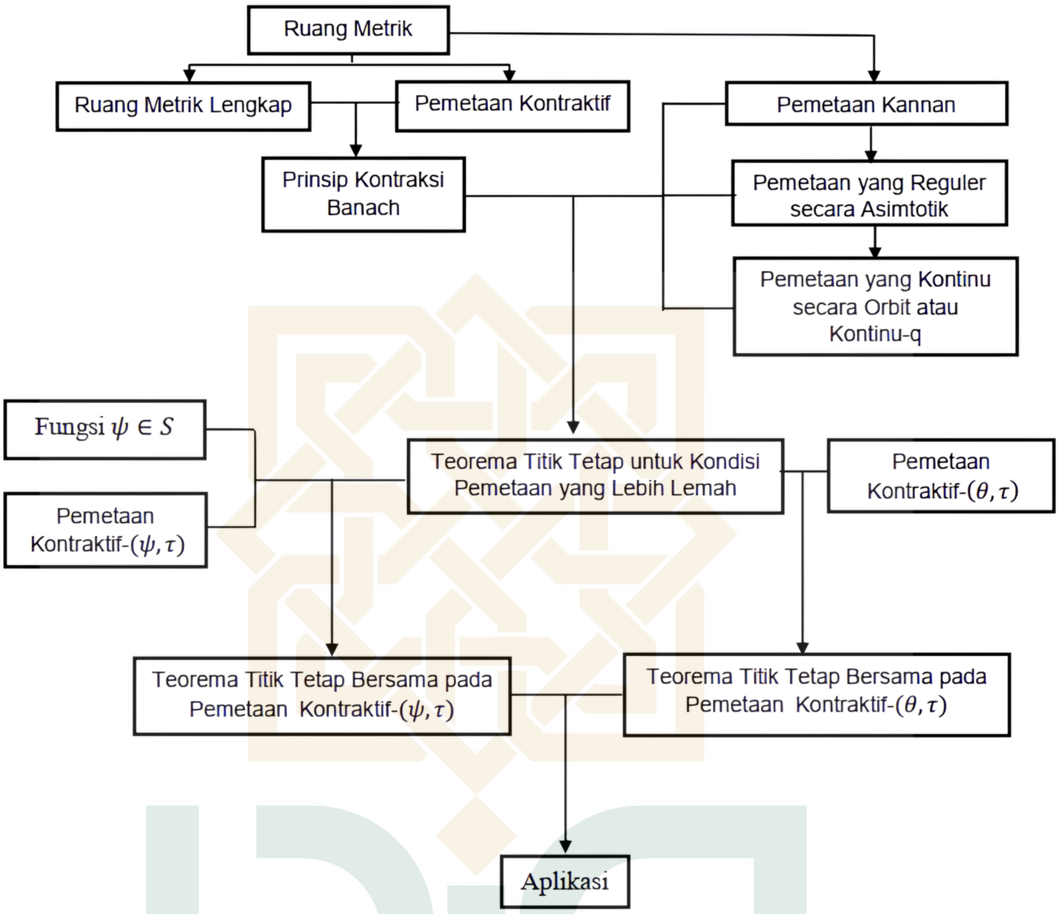
Skripsi ini menggunakan dasar-dasar analisis real dalam *Introduction to Real Analysis* (Bartle & Sherbert, 2010). Kemudian, karena penelitian ini bekerja di dalam ruang metrik maka digunakan referensi *"Metric Spaces"*(Shirali & Vasudeva, 2006) dan *"Fixed Point Theory and Variational Principles in Metric Spaces"*(Ansari & Sahu, 2023). Dalam mendukung perluasan teori titik tetap terdapat beberapa rujukan seperti *"Metric Spaces"*(Shirali & Vasudeva, 2006) dan *"Remarks on Asymptotic Regularity and Fixed Points"* (Górnicki, 2019). Berjalannya penelitian ini, juga membutuhkan materi pendukung seperti limit superior dan limit inferior dengan rujukan *"Real Analysis Modern Techniques and Their Applications"*(Folland, 1999), *"Basic Analysis:Introduction to Real Analysis"*(Lebl, 2021), dan *"Real Analysis"*(Thomson et al., 2008).

1.7. Metode Penelitian

Penyusunan penelitian ini menggunakan metode studi literatur sebagai metode utamanya. Pendekatan kualitatif dalam studi literatur digunakan untuk menganalisis pemahaman terkait materi yang akan digunakan dari berbagai buku dan artikel. Penelitian ini menyajikan langkah-langkah pembuktian teorema serta contoh dari definisi pendukung yang akan digunakan dalam proses pembuktian.

Penelitian diawali dengan pembahasan mengenai ruang metrik. Selanjutnya, dari ruang metrik akan didefinisikan mengenai ruang metrik lengkap. Prinsip kontraksi Banach atau teorema ketunggalan titik tetap dapat diperoleh melalui penggunaan definisi pemetaan kontraktif dan ruang metrik lengkap. Selanjutnya, akan diperkenalkan mengenai sifat reguler secara asimtotik, kontinu secara orbit, kontinu-q, dan definisi pemetaan Kannan yang berperan penting dalam perluasan prinsip kontraksi Banach. Kemudian, penelitian berlanjut dari yang sebelumnya hanya menggunakan satu pemetaan menjadi dua pemetaan dengan beberapa kondisi sehingga dapat dicari titik tetap bersama dua pemetaan. Teorema titik tetap dengan kondisi yang lebih lemah dapat diperoleh melalui penggunaan fungsi $\psi \in \mathcal{S}$ sebagai koefisien kontraktif, sehingga titik tetap bersama dari dua pemetaan kontraktif-(ψ, τ) dapat ditemukan untuk persoalan matematika yang lebih umum.

Pada akhirnya, fokus dari penelitian ini terpaku pada bagaimana cara memperluas prinsip kontraksi Banach sehingga diperoleh titik tetap bersama pada dua pemetaan. Penelitian ini akan memberikan pemahaman mengenai langkah-langkah yang sistematis dengan menggunakan metode studi literatur pada perluasan yang akan dilakukan. Untuk lebih memahami metode penelitian ini, berikut merupakan gambar alur penelitian yang akan dilakukan. Alur penelitian ini diharapkan dapat mempermudah pembaca dalam memahami metode penelitian.



Gambar 1.1 Alur Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan penelitian ini dibagi dalam empat bab. Pada bab pertama dijelaskan mengenai pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan masalah, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan dari penelitian yang dilakukan.

Pada bab kedua akan dijelaskan mengenai dasar teori yang digunakan dalam penelitian ini. Dasar teori pada penelitian ini berisi mengenai dasar-dasar analisis real, ruang metrik, titik tetap, serta materi pendukung yaitu limit superior dan limit inferior. Kemudian, dasar teori di atas dilengkapi dengan pembuktian atau contoh.

Selanjutnya, bab ketiga dalam penelitian ini adalah pembahasan. Bab ini nantinya akan menjawab pertanyaan-pertanyaan pada rumusan masalah yang sebelumnya telah dipaparkan. Pada bab ini, akan dijelaskan mengenai pembuktian dan contoh teorema titik tetap bersama pada pemetaan kontraktif-(θ, τ) dan kontraktif-(ψ, τ) di ruang metrik lengkap.

Bab keempat dalam penelitian ni memuat kesimpulan dan saran. Pada bagian kesimpulan, akan dijelaskan hasil akhir dari penelitian yang sudah dilakukan. Kemudian, pada bagian terakhir terdapat saran pengembangan penelitian dari penulis.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa dua pemetaan yang memenuhi kondisi kontraktif-(θ, τ) di ruang metrik lengkap memiliki titik tetap bersama yang tunggal. Ketunggalan titik tetap bersama tersebut diperoleh dengan asumsi bahwa kedua pemetaan memenuhi kondisi reguler secara asimtotik. Selain itu, pemetaan juga harus bersifat kontinu-q atau kontinu secara orbit.

Berdasarkan hasil analisis pada Teorema 3.1.21, diketahui bahwa $\theta \in [0, 1)$. Akan tetapi dalam penerapannya tidak selalu dapat dipenuhi kondisi kontraktif $\theta \in [0, 1)$. Dengan mengganti konstanta θ menjadi sebuah fungsi $\psi \in \mathcal{S}$ yang memenuhi Definisi 3.2.1, maka diperoleh pemetaan kontraktif-(ψ, τ). Pemetaan kontraktif-(ψ, τ) yang memenuhi kondisi reguler secara asimtotik serta kontinu-q atau kontinu secara orbit di ruang metrik lengkap memiliki titik tetap bersama yang tunggal.

Sebagai ilustrasi, diberikan aplikasi dari Teorema 3.1.21 dan Teorema 3.2.12 yaitu Contoh 3.3.1 dan Contoh 3.3.2. Berdasarkan Lemma 3.2.10 diperoleh hubungan antara kontraktif-(θ, τ) dan kontraktif-(ψ, τ). Pemetaan yang kontraktif-(θ, τ) pasti kontraktif-(ψ, τ). Akan tetapi, kebalikannya belum tentu berlaku. Akibatnya diperoleh bahwa Teorema 3.2.12 merupakan generalisasi dari Teorema 3.1.21.

4.2. Saran

Saran yang akan penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini masih terbatas pada titik tetap bersama dari dua pemetaan. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat menganalisis ketunggalan titik tetap bersama dari 3 pemetaan atau lebih.

2. Penelitian ini digunakan untuk pemetaan-pemetaan yang berada di ruang metrik lengkap. Oleh karena itu, perlu dikembangkan untuk ruang lain yang lebih kompleks.

3. Penelitian ini masih menggunakan contoh ruang metrik dengan metrik yang sederhana. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat menggunakan metrik lain seperti metrik supremum agar contoh menjadi lebih bervariasi.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, P., Jleli, M., & Samet, B. (2018). *Fixed Point Theory in Metric Spaces: Recent Advances and Applications*. Springer Singapore, Singapore, DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-13-2913-5.

Ansari, Q. H. & Sahu, D. (2023). *Fixed Point Theory and Variational Principles in Metric Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.

Aranđelović, I. D. & Mateljević, M. S. (2017). Ljubomir b. ćirić (1935-2016). *Filomat*, 31(11):3035–3040.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 4th edition.

Browder, F. E. & Petryshyn, W. V. (1966). The solution by iteration of nonlinear functional equations in banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, pages 571–575.

Folland, B. G. (1999). *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, Canada, 2th edition.

Geraghty, M. A. (1973). On contractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 40(2):604–608.

Górnicki, J. (2019). Remarks on asymptotic regularity and fixed points. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 21(29), DOI: https://doi.org/10.1007/s11784-019-0668-0.

Huang, H. & Qian, X. (2022). Common fixed point of nonlinear contractive mappings. *AIMS Mathematics*, 8:607–621.

Kementerian Agama RI (2026). Al-qur'an digital. https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/29?from=1&to=69. Diakses pada 5 Juni 2026.

Khan, A. R. & Oyetunbi, D. M. (2020). On some mappings with a unique common fixed point. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22(47), DOI: https://doi.org/10.1007/s11784-020-00781-w.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, New York.

Lebl, J. (2021). *Basic Analysis: Introduction to Real Analysis, Volume I*. CreateSpace Independent Publishing Platform, version 5.4 edition.

Pant, A. & Pant, R. P. (2017). Fixed points and continuity of contractive maps. *Filomat*, 31(11):3501–3506.

Shirali, S. & Vasudeva, H. L. (2006). *Metric Spaces*. Springer, London, DOI: 10.1007/978-1-84628-570-1.

Thomson, B. S., Bruckner, J. B., & Bruckner, A. M. (2008). *Real Analysis*. Prentice Hall, 2th edition.

Ume, J. S. (2015). Fixed point theorems for kannan-type maps. *Fixed Point Theory and Applications*, (38), DOI: 10.1186/s13663-015-0286-5.