

SKRIPSI

SPEKTRUM GRAF PANGKAT ATAS GRUP DIHEDRAL



AHMAD IKHLASUL A'MAL

22106010025

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2026

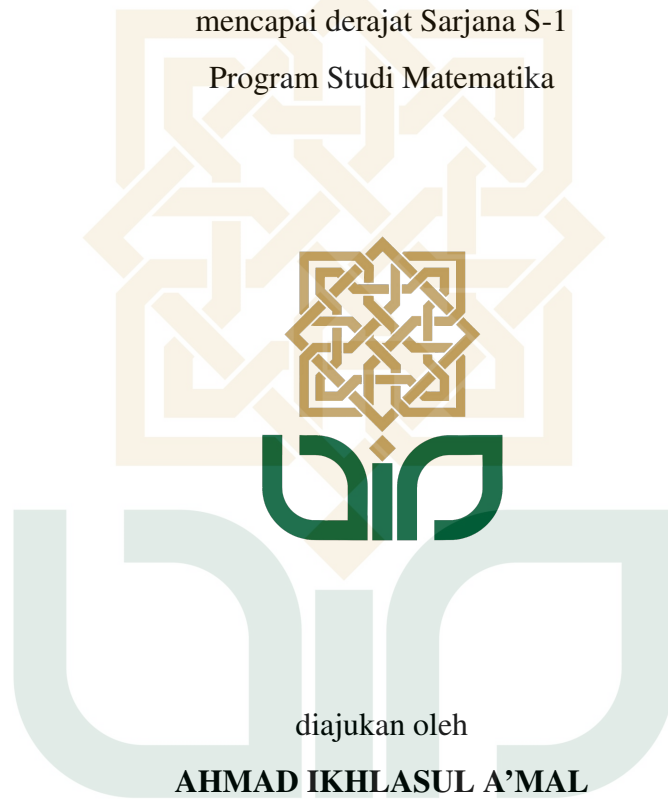
SPEKTRUM GRAF PANGKAT ATAS GRUP DIHEDRAL

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



diajukan oleh

AHMAD IKHLASUL A'MAL

22106010025

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2026



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Ahmad Ikhlasul A'mal
NIM : 22106010025
Judul Skripsi : Spektrum Graf Pangkat Atas Grup Dihedral

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 18 Mei 2026

Pembimbing

Arif Munandar, M.Sc.

NIP. 199207212019031013



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1196/Un.02/DST/PP.00.9/06/2026

Tugas Akhir dengan judul : Spektrum Graf Pangkat atas Grup Dihedral

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : AHMAD IKHLASUL A'MAL
Nomor Induk Mahasiswa : 22106010025
Telah diujikan pada : Selasa, 02 Juni 2026
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang
Arif Munandar, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 6a21f5143610f



Penguji I
Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 6a21076dc91f3



Penguji II
Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 6a1fd63a94a48



Yogyakarta, 02 Juni 2026
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6a223616b3fa4

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Ahmad Ikhlasul A'mal

NIM : 22106010025

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 21 Mei 2026



Ahmad Ikhlasul A'mal

HALAMAN PERSEMBAHAN



Diisi sesuai dengan tujuan persembahan skripsi

HALAMAN MOTTO



"Garis akhir mungkin belum terlihat, namun langkahmu hari ini membawamu lebih dekat daripada hari kemarin"

"Jangan pernah mimpikan hidupmu, tapi hidupkan mimpimu"

"Walaupun hasilnya tidak sempurna, setidaknya kamu sudah berusaha"

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil' alamin, puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Spektrum Graf Pangkat Atas Grup Dihedral". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik dan Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta yang telah memberikan pengarahan dan juga ilmu kepada penulis selama menempuh pendidikan.
2. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Arif Munandar, M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
4. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.
5. Orang Tua yang selalu memberikan semangat dan mendoakan selama saya menempuh pendidikan.

6. Sahabat dan Pihak lain yang berperan dalam pengerjaan skripsi.
7. Gemini AI dan sejenisnya yang telah membantu penulisan skripsi dalam menuliskan matriks dan gambar graf.
8. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesainya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 28 April 2026

Ahmad Ikhlasul A'mal



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMBANG	xiv
INTISARI	xvi
ABSTRACT	xvii
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	3
1.3. Rumusan Masalah	4
1.4. Tujuan Penelitian	4
1.5. Manfaat Penelitian	5
1.6. Tinjauan Pustaka	5
1.7. Metode Penelitian	8
1.8. Sistematika Penulisan	10
II DASAR TEORI	11

2.1. Grup	11
2.2. Graf	20
2.2.1. Adjacent dan Insiden	21
2.2.2. Derajat vertek	22
2.2.3. Keterhubungan Graf	22
2.3. MATRIKS	22
2.3.1. Operasi Pada Matriks	24
2.3.2. Determinan Matriks	27
2.3.3. Invers Matriks	31
2.3.4. Matriks Representasi Graf	37
2.3.5. Polinomial Karakteristik dan Nilai Eigen	40
2.4. Spektrum Graf	45
III PEMBAHASAN	47
3.1. Graf Pangkat pada Grup Dihedral D_{2n}	47
3.2. Spektrum Graf Pangkat Dihedral D_{2n} untuk $n = p^k$	51
3.2.1. Spektrum <i>Adjacency</i> dari Graf Pangkat D_{2n}	52
3.2.2. Spektrum <i>Laplacian</i> dari Graf Pangkat D_{2n}	61
3.2.3. Spektrum <i>Signless Laplacian</i> dari Graf Pangkat D_{2n}	70
3.3. Spektrum Graf Pangkat Dihedral D_{2n} Ternormalisasi	80
3.3.1. Spektrum <i>Adjacency</i> Ternormalisasi dari Graf Pangkat D_{2n}	80
3.3.2. Spektrum <i>Laplacian</i> Ternormalisasi dari Graf Pangkat D_{2n}	91
3.3.3. Spektrum <i>Signless Laplacian</i> ternormalisasi dari graf pang-	
kat D_{2n}	100
3.4. Spektrum Graf Pangkat Dihedral D_{2n} untuk $n = pq$	110
3.4.1. Spektrum <i>adjacency</i> dari graf pangkat D_{12}	112
IV PENUTUP	128

4.1. Kesimpulan	128
4.2. Saran	129
DAFTAR PUSTAKA	129
Curriculum Vitae	132



DAFTAR TABEL

1.1 Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian	7
3.1 Pangkat dari anggota grup dihedral D_6	49
3.2 Pangkat dari anggota grup dihedral D_{12}	111



DAFTAR GAMBAR

2.1 Segi-3 beraturan	14
2.2 Rotasi segi-3 beraturan	14
2.3 Refleksi Segi-3 beraturan	15
2.4 Rotasi berlawanan arah jarum jam dan refleksi segi-4 beraturan	16
3.1 Graf Pangkat dari grup dihedral D_6	49
3.2 Graf Pangkat dari grup dihedral D_{12}	111

DAFTAR LAMBANG

$x \in A$:	x elemen dari A
$=$:	sama dengan
\neq	:	tidak sama dengan
$A \subseteq X$:	A himpunan bagian (<i>subset</i>) atau sama dengan X
\mathbb{N}	:	himpunan semua bilangan asli
\mathbb{Z}	:	himpunan semua bilangan bulat
$M_n\mathbb{Z}$:	himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri bilangan bulat
\mathbb{R}	:	himpunan semua bilangan real
\mathbb{C}	:	himpunan semua bilangan kompleks
\mathbb{R}^n	:	ruang vektor real berdimensi n
\mathbb{C}^n	:	ruang vektor kompleks berdimensi n
■	:	akhir suatu bukti
$ A $:	determinan dari matriks A
\rightarrow	:	menuju
\leftrightarrow	:	menukar baris matriks
$\sum_{i=1}^n a_i$:	penjumlahan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$p \Rightarrow q$:	jika p maka q
$p \Leftrightarrow q$:	p jika dan hanya jika q
Γ	:	Gamma
$\circ(a)$:	order dari a

δ	:	delta
λ	:	lambda
D_{2n}	:	grup dihedral dengan order $2n$
$Spec(G)$:	spektrum dari graf G
*	:	operasi biner
$m(\lambda_i)$:	multiplisitas dari nilai eigen λ_i
$P(A)$:	polinomial karakteristik dari matriks A
$I_{n \times n}$:	matriks identitas berukuran $n \times n$
$D(\Gamma_{D_{2n}})$:	matriks derajat dari graf pangkat grup dihedral
$A(\Gamma_{D_{2n}})$:	matriks adjacency dari graf pangkat grup dihedral
$L(\Gamma_{D_{2n}})$:	matriks laplacian dari graf pangkat grup dihedral
$SL(\Gamma_{D_{2n}})$:	matriks signless laplacian dari graf pangkat grup dihedral
$a b$:	a membagi habis b
$FPB(a, b)$:	Faktor Persekutuan Terbesar dari a dan b

INTISARI

SPEKTRUM GRAF PANGKAT ATAS GRUP DIHEDRAL

Oleh

AHMAD IKHLASUL A'MAL

22106010025

Graf pangkat merupakan graf yang merepresentasikan relasi perpangkatan antara elemen-elemen di dalam suatu grup dimana dua titik berbeda dihubungkan oleh sisi jika salah satu elemen adalah pangkat dari elemen lainnya. Penelitian ini berfokus pada penentuan spektrum graf pangkat atas grup dihedral D_{2n} dengan batasan orde $n = p^k$ dan $n = pq$ dengan p dan q merupakan bilangan prima berbeda dan suatu k bilangan asli. Dalam perhitungannya, proses dimulai dengan mengonstruksi graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} berdasarkan relasi perpangkatan antar elemennya. Setelah struktur graf dan derajat setiap verteknya diketahui, graf pangkat direpresentasikan ke dalam bentuk matriks *adjacency*, matriks *laplacian*, matriks *signless laplacian* dan bentuk ternormalisasi dari ketiga matriks representasi. Dari masing-masing matriks representasi, dikonstruksi persamaan polinomial karakteristik untuk mencari nilai-nilai eigen beserta multiplisitas yang disebut spektrum graf. Dalam proses penyederhanaan matriks dan pencarian nilai-nilai eigen, identifikasi terhadap order elemen dan subgrup pembangun menjadi sangat krusial. Pada kasus $n = p^k$, subgrup-subgrupnya membentuk suatu rantai (*chain*) yang terurut, sehingga memungkinkan perhitungan derajat vertek dan penentuan nilai eigen secara sistematis. Sebaliknya pada kasus $n = pq$, struktur subgrup mengalami percabangan yang mengakibatkan kompleksitas tinggi pada perhitungan derajat vertek. Oleh karena itu, penentuan spektrum untuk kasus $n = pq$ dibatasi secara khusus pada matriks *adjacency*. Hasil dari penelitian ini merumuskan polinomial karakteristik beserta nilai eigen dari matriks representasi graf yang bersesuaian untuk masing-masing kasus graf pangkat pada grup dihedral.

Kata kunci : Graf Pangkat, Grup Dihedral, Spektrum, Polinomial Karakteristik, Matriks *adjacency*.

ABSTRACT

SPEKTRUM GRAF PANGKAT ATAS GRUP DIHEDRAL

By

AHMAD IKHLASUL A'MAL

22106010025

The power graph is a graph that represents the power relation between elements within a group, where two distinct vertices are connected by an edge if one element is a power of the other. This study focuses on determining the spectrum of the power graph over the dihedral group D_{2n} restricted to the orders $n = p^k$ and $n = pq$, where p and q are distinct prime numbers and k is a natural number. In the computation, the process begins by constructing the power graph of the dihedral group D_{2n} based on the power relations among its elements. Once the graph structure and the degree of each vertex are identified, the power graph is represented in the form of an adjacency matrix, Laplacian matrix, signless Laplacian matrix, as well as the normalized forms of these three representation matrices. From each representation matrix, the characteristic polynomial equation is constructed to find the eigenvalues along with their multiplicities, collectively referred to as the spectrum of the graph. During the matrix simplification and the computation of eigenvalues, identifying the element orders and generating subgroups becomes highly crucial. In the case of $n = p^k$, the subgroups form an ordered chain, allowing for the systematic calculation of vertex degrees and the determination of eigenvalues. Conversely, in the case of $n = pq$, the subgroup structure exhibits branching, leading to high complexity in calculating the vertex degrees. Consequently, the determination of the spectrum for the $n = pq$ case is specifically limited to the adjacency matrix. The results of this research formulate the characteristic polynomials along with the eigenvalues of the corresponding graph representation matrices for each case of the power graph on the dihedral group.

Keyword : Power Graphs, Dihedral Groups, Spectrum, Characteristic Polynomials, *Adjacency* Matrices.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika dan Al-Qur'an memiliki hubungan yang harmonis di mana matematika dipandang sebagai bahasa universal untuk membaca keteraturan alam semesta yang diciptakan Allah SWT. Sebagai khalifah di bumi, manusia diperintahkan untuk mempelajari tanda-tanda kebesaran-Nya, tidak hanya yang tersurat di dalam Al-Qur'an, tetapi juga yang tersirat di alam semesta. Salah satu konsep mendasar dalam kehidupan manusia dan alam semesta adalah konsep "relasi" atau hubungan.

Dalam kehidupan sosial, tidak ada individu yang dapat berdiri sendiri tanpa terhubung dengan individu lain. Allah SWT menegaskan pentingnya interaksi dan hubungan antar sesama dalam Al-Qur'an Surah Al-Hujurat ayat 13:

يَا أَيُّهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاكُمْ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَىٰ وَجَعَلْنَاكُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا
إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتْقَاكُمْ إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

Artinya: "Wahai manusia, sesungguhnya Kami telah menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan perempuan. Kemudian, Kami menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku agar kamu saling mengenal. Sesungguhnya yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah adalah orang yang paling bertakwa. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha teliti."

Pada Al-Qur'an Surah Al-Hujurat ayat 13 mengisyaratkan adanya interaksi, komunikasi, dan relasi yang membentuk sebuah struktur sosial yang kompleks. Ji-

ka manusia-manusia dipandang sebagai titik-titik (*verteks*) dan hubungan perkenalan atau kekerabatan di antara mereka dipandang sebagai garis (*edges*), maka terbentuklah sebuah struktur. Abstraksi dari pola hubungan ini dalam matematika dipelajari melalui Teori Graf.

Seiring perkembangannya, Teori Graf tidak hanya digunakan untuk memodelkan masalah nyata, tetapi juga menjadi alat bantu yang kuat untuk memvisualisasikan struktur aljabar, khususnya dalam Teori Grup. Salah satu representasi graf yang menarik perhatian untuk dibahas adalah Graf Pangkat. Graf pangkat dari suatu grup G dinotasikan dengan Γ_G didefinisikan sebagai graf yang himpunan titiknya adalah elemen-elemen grup G , dan dua titik yang berbeda dihubungkan jika salah satunya merupakan hasil perpangkatan dari yang lain.

Dalam penelitian ini, objek yang dikaji adalah graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} . Grup dihedral D_{2n} yaitu grup yang merepresentasikan simetri dari poligon beraturan segi- n . Grup ini dipilih karena sifatnya yang non-abelian (tidak komutatif) dan memiliki struktur geometri yang kompleks, sehingga graf pangkat yang dihasilkan memiliki struktur graf yang unik dibandingkan grup siklik.

Graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} dinotasikan $\Gamma_{D_{2n}}$ merupakan graf terhubung dengan himpunan titik yang terdiri dari elemen identitas, elemen rotasi, dan elemen refleksi. Penentuan spektrum pada $\Gamma_{D_{2n}}$ utamanya melibatkan matriks adjacency, matriks laplacian, dan matriks signless laplacian. Matriks adjacency $A(\Gamma_{D_{2n}})$ didefinisikan sebagai matriks yang entri-entrinya bernilai 1 jika dua titik bertetangga dan 0 jika dua titik tidak bertetangga. Selanjutnya matriks laplacian $L(\Gamma_{D_{2n}})$ diperoleh dari selisih antara matriks derajat $D(\Gamma_{D_{2n}})$ dengan matriks adjacency $A(\Gamma_{D_{2n}})$, sedangkan matriks signless laplacian $SL(\Gamma_{D_{2n}})$ diperoleh dari penjumlahan matriks derajat $D(\Gamma_{D_{2n}})$ dan matriks adjacency $A(\Gamma_{D_{2n}})$.

Secara lebih rinci, langkah-langkah pembahasan dalam skripsi ini akan dimulai dengan mengonstruksi matriks representasi dari graf pangkat grup dihedral D_{2n} dengan dua kasus nilai n , yaitu $n = p^k$ (dengan p bilangan prima dan k bilangan asli dan $n = pq$ (dengan p dan q bilangan prima berbeda), yang meliputi matriks *adjacency*, matriks laplacian, dan matriks signless laplacian. Setelah representasi matriks berhasil dibentuk, selanjutnya melakukan partisi matriks untuk mempermudah mencari determinan. Langkah krusial selanjutnya adalah merumuskan polinomial karakteristik dari masing-masing matriks tersebut, yang pada akhirnya digunakan untuk mencari akar-akar dari polinomial karakteristik sehingga spektrum berupa nilai eigen dari matriks representasi graf pangkat dihedral D_{2n} dapat ditentukan secara komprehensif.

1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada tugas akhir ini difokuskan pada penentuan spektrum graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} dengan dua kasus nilai n , yaitu $n = p^k$ (dengan p bilangan prima dan k bilangan asli dan $n = pq$ (dengan p dan q bilangan prima berbeda). Sebagai langkah awal, dilakukan penelitian pada graf $\Gamma_{D_{12}}$ sebagai bentuk koreksi atas ketidakakuratan hasil pada penelitian [Mir et al. \(2025\)](#) pada matriks *adjacency* graf pangkat dihedral D_{2n} untuk kasus $n = pq$. Pembahasan tersebut kemudian digunakan sebagai acuan untuk merumuskan polinomial karakteristik dan nilai eigen graf pangkat dihedral untuk kasus $n = pq$. Lebih lanjut, pencarian spektrum pada penelitian ini dibatasi hanya pada spektrum dari matriks *adjacency* graf pangkat dihedral D_{2n} untuk kasus $n = pq$. Penelitian ini tidak membahas spektrum dari matriks laplacian, signless laplacian, maupun bentuk ternormalisasi untuk kasus $n = pq$. Pembatasan ini dilakukan karena struktur subgrup siklik pada grup rotasi untuk kasus $n = pq$ tidak membentuk rantai, me-

lainkan bercabang dan memunculkan blok-blok graf yang tidak saling terhubung. Hal ini mengakibatkan tingginya kompleksitas dalam perumusan matriks diagonal yang entrinya berupa derajat vertek dari graf pangkat D_{2n} untuk $n = pq$, sehingga penelitian ini difokuskan pada spektrum matriks *adjacency*.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep dasar graf pangkat?
2. Bagaimana spektrum graf pangkat dihedral D_{2n} untuk $n = p^k$?
3. Bagaimana spektrum graf pangkat dihedral D_{2n} untuk $n = p^k$ yang ternormalisasi?
4. Bagaimana spektrum matriks *adjacency* graf pangkat dihedral D_{2n} untuk $n = pq$?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari tentang konsep dasar graf pangkat.
2. Mempelajari tentang spektrum graf pangkat dihedral D_{2n} untuk $n = p^k$.
3. Mempelajari tentang spektrum graf pangkat dihedral D_{2n} untuk $n = p^k$ ternormalisasi.
4. Mempelajari tentang spektrum matriks *adjacency* graf pangkat dihedral D_{2n} untuk $n = pq$.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman tentang konsep dasar graf pangkat.
2. Memberikan pemahaman tentang spektrum graf pangkat dihedral D_{2n} untuk $n = p^k$.
3. Memberikan pemahaman tentang spektrum graf pangkat dihedral D_{2n} ternormalisasi.
4. Memberikan pemahaman tentang spektrum graf pangkat dihedral D_{2n} untuk $n = pq$.

1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan skripsi ini bersumber dari buku, makalah, jurnal, dan skripsi.

1. Artikel karya [Romdhini et al. \(2024\)](#) dengan judul "*Spectral Properties of Power Graph of Dihedral Groups*" membahas tentang sifat-sifat spektrum pada graf pangkat dari grup dihedral, berfokus pada spektrum dari matriks-matriks representasi.
2. Artikel karya [Mir et al. \(2025\)](#) dengan judul "*On the Spectral Analysis of Power Graph of Dihedral Groups*" membahas tentang spektrum pada graf pangkat dari grup dihedral yang berfokus pada kasus $n = pq$ dari matriks-matriks representasi.

3. Buku karya [Malik et al. \(2007\)](#) dengan judul "*Introduction to Abstract Algebra*" membahas tentang konsep-konsep dasar aljabar abstrak, termasuk teori grup, subgrup, dan sifat-sifat struktur aljabar yang menjadi landasan teoritis dalam kajian grup dihedral.
4. Buku karya [Munandar, 2022b](#) dengan judul "*Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*" membahas tentang definisi dasar graf, jenis-jenis graf, representasi matriks dari graf, hingga penerapan teori graf itu sendiri.
5. Artikel karya [Asmarani et al. \(2021\)](#) dengan judul "*The Power Graph of a Dihedral Group*" membahas tentang definisi, struktur, dan sifat-sifat dasar pembentukan graf pangkat pada grup dihedral D_{2n} .

Dalam penelitian sebelumnya, [Romdhini et al. \(2024\)](#) telah merumuskan polinomial karakteristik untuk matriks-matriks ini secara umum. Namun mengingat sifat keterhubungan antar elemen dalam graf pangkat sangat bergantung pada faktorisasi prima dari orde grupnya, rumusan umum tersebut belum merincikan perbedaan struktur graf yang terbentuk. Oleh karena itu, penelitian terbaru oleh [Mir et al. \(2025\)](#) memberikan sanggahan dengan menunjukkan bahwa rumusan [Romdhini et al. \(2024\)](#) tidak berlaku secara umum untuk semua $n > 3$. Penelitian yang dilakukan oleh [Mir et al. \(2025\)](#) memberikan contoh penyangkal (counter examples) dengan mengambil kasus $n = 6$ yaitu pada grup dihedral D_{12} . Berdasarkan perhitungan secara langsung, spektrum nilai eigen dari matriks ketetanggaan, Laplacian, dan signless Laplacian untuk graf pangkat grup D_{12} terbukti tidak sesuai dengan akar-akar polinomial karakteristik yang dihasilkan dari penelitian [Romdhini et al. \(2024\)](#).

Meskipun penelitian [Mir et al. \(2025\)](#) memberikan kontribusi penting melalui contoh penyangkal (counter examples) untuk D_{12} , penelitian [Mir et al. \(2025\)](#)

masih memiliki keterbatasan. Berdasarkan penelusuran lebih lanjut, penelitian [Mir et al. \(2025\)](#) belum sepenuhnya akurat, dibuktikan dengan adanya perbedaan hasil perhitungan spektrum pada struktur graf yang dibahas. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan sebagai bentuk koreksi dan pembaruan dari penelitian [Mir et al. \(2025\)](#). Untuk memberikan gambaran yang lebih sistematis mengenai keterkaitan penelitian terdahulu dengan penelitian ini, berikut disajikan tabel yang memuat persamaan dan perbedaan masing-masing penelitian dengan fokus penelitian yang sedang dilakukan penulis.

Tabel 1.1 Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian

Judul (Tahun)	Penulis	Persamaan	Perbedaan
<i>Spectral Properties of Power Graph of Dihedral Groups</i> (2024)	Mamika Ujainita Romdhini, Athirah Nawawi, Faisal Al-Sharqi, Ashraf Al-Quran	Membahas perhitungan polinomial karakteristik untuk matriks ketetanggaan (<i>adjacency</i>), Laplacian, dan signless Laplacian dari graf pangkat pada grup dihedral.	Mengklaim bahwa formulasi polinomial karakteristik dari matriks representasi pada graf pangkat atas grup dihedral yang berlaku secara umum untuk semua $n \geq 3$.
<i>On the Spectral Analysis of Power Graph of Dihedral Groups</i> (2025)	Basit Auyoob Mir, Fouzul Atik, Priti Prasanna Mondal	Membahas penentuan polinomial karakteristik dan spektrum matriks ketetanggaan (<i>adjacency</i>), Laplacian, dan signless Laplacian dari graf pangkat pada grup dihedral.	Memberikan tinjauan kritis dan sanggahan (koreksi) terhadap hasil penelitian Romdhini et al. (2024) terkait penentuan spektrum dari matriks representasi pada graf pangkat atas grup dihedral.

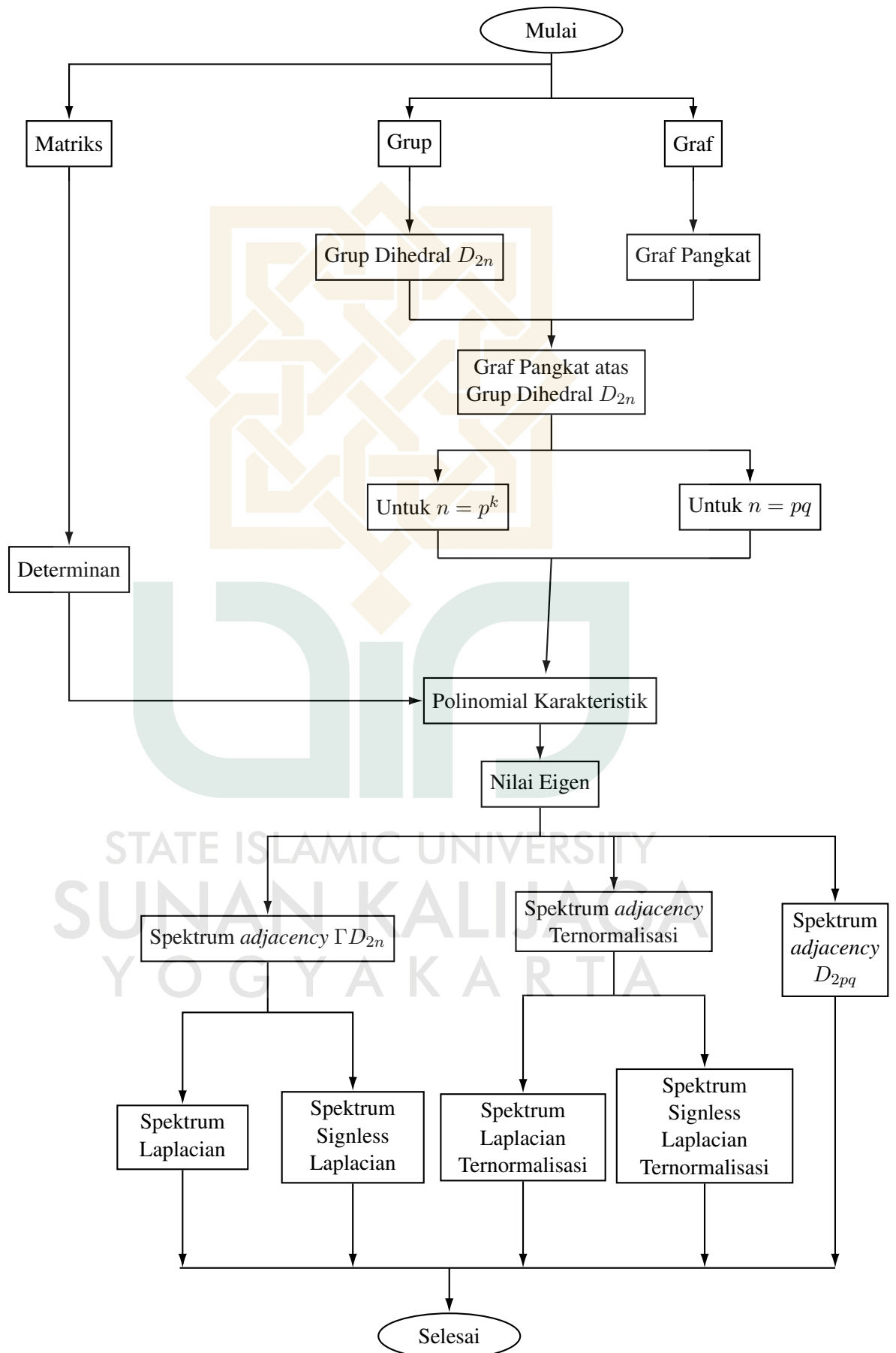
1.7. Metode Penelitian

Penelitian ini penulis menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal terkait topik penelitian yaitu; konsep dasar matriks, konsep dasar grup dihedral, konsep dasar graf pangkat, graf pangkat atas grup dihedral, representasi grup pada graf, spektrum graf pangkat atas grup dihedral, dan spektrum graf pangkat atas grup dihedral ternormalisasi. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

1. Membahas konsep dasar dari matriks, grup, dan graf.
2. Membahas konsep dasar dari grup dihedral dan graf pangkat.
3. Membahas konsep dasar dari graf pangkat atas grup dihedral.
4. Membahas konsep dasar dari polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks representasi graf.
5. Membahas konsep dasar dari spektrum matriks representasi graf.

Berikut skema yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA



1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi lima bab, yaitu sebagai berikut.

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas tentang dasar-dasar teori grup, khususnya grup dihedral, dan teori graf dasar. Selain itu, bab ini juga memuat konsep aljabar matriks yang mendasari spektrum graf, meliputi pengenalan matriks *adjacency*, Laplacian, Signless Laplacian, bentuk ternormalisasinya, serta polinomial karakteristik.
- BAB 3** : Bab ini membahas tentang konsep dasar dari graf pangkat pada grup dihedral D_{2n} , spektrum graf pangkat dihedral D_{2n} untuk $n = p^k$ dan $n = pq$, dan spektrum graf pangkat dihedral D_{2n} untuk bentuk ternormalisasinya.
- BAB 4** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

PENUTUP

Bab penutup ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} direpresentasikan dengan menjadikan elemen-elemen dari grup dihedral D_{2n} sebagai himpunan verteks dan dua vertek berbeda pada grup dihedral D_{2n} terhubung jika dan hanya jika salah satu vertek merupakan hasil perpangkatan dari vertek yang lain.
2. Spektrum graf pangkat grup dihedral D_{2n} pada kasus $n = p^k$ dengan p adalah bilangan prima dan k adalah bilangan asli, subgrup-subgrup yang dibangun oleh elemen rotasi didalam grup dihedral D_{2n} membentuk rantai (chain) yang terurut sehingga mempermudah perhitungan derajat vertek secara sistematis. Penelitian ini berhasil merumuskan polinomial karakteristik beserta spektrum secara eksplisit untuk matriks representasi graf diantaranya matriks adjacency, matriks laplacian, dan matriks signless laplacian.
3. Terkait bentuk ternormalisasinya, penelitian ini juga menentukan rumusan polinomial karakteristik sekaligus spektrum dari matriks representasi graf pangkat grup dihedral D_{2n} pada kasus $n = p^k$. Perumusan ini mencakup

matriks adjacency ternormalisasi, matriks laplacian ternormalisasi, dan matriks signless laplacian ternormalisasi yang diperoleh dengan memanfaatkan matriks derajat graf.

4. Dalam penentuan spektrum graf pangkat D_{2n} untuk kasus $n = pq$, dengan p dan q merupakan bilangan prima berbeda, struktur subgrup rotasinya tidak lagi membentuk suatu rantai (chain), melainkan mengalami percabangan, yang mengakibatkan tingginya kompleksitas dalam perhitungan derajat verteks. Oleh karena itu, penentuan spektrum hanya difokuskan pada matriks adjacency. Perumusan umum polinomial karakteristik secara utuh dari matriks adjacency graf pangkat D_{2n} untuk $n = pq$ sangat sulit disajikan dalam satu persamaan, namun ditemukan pola struktural yang konsisten yaitu selalu memiliki nilai eigen $\lambda = 0$ dengan multiplisitas sekurang-kurangnya $n - 1$.

4.2. Saran

Saran yang akan penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini hanya dibatasi pada penentuan spektrum graf pangkat atas grup dihedral D_{2n} untuk kasus $n = pq$ dan dibatasi hanya pada matriks adjacency. Oleh karena itu, disarankan bagi peneliti selanjutnya untuk mencoba merumuskan polinomial karakteristik dan spektrum dari matriks laplacian dan signless laplacian pada graf pangkat D_{2n} untuk kasus $n = pq$.
2. Disarankan bagi peneliti selanjutnya untuk mengkaji dan merumuskan spektrum graf pangkat D_{2n} ternormalisasi untuk $n = pq$ yang meliputi matriks adjacency ternormalisasi, matriks laplacian ternormalisasi, dan matriks signless laplacian ternormalisasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. (2009). *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. UIN Malang Press, Malang.
- Altindag, S. B. B., Milovanovic, E., Matejic, M., & Milovanovic, I. (2023). The normalized signless laplacian estrada index of graphs. *Transactions on Combinatorics*, 12(3):131–142, DOI: [10.22108/toc.2022.127155.1814](https://doi.org/10.22108/toc.2022.127155.1814), <https://toc.ui.ac.ir>.
- Anton, H. & Rorres, C. (2000). *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. John Wiley & Sons, New York, 8th edition.
- Asmarani, E. Y., Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021). The power graph of a dihedral group. *Eigen Mathematics Journal*, 4(2):81–85, DOI: [10.29303/emj.v4i2.117](https://doi.org/10.29303/emj.v4i2.117).
- Biyikoglu, T., Leydold, J., & Stadler, P. F. (2007). *Laplacian Eigenvectors of Graphs: Perron-Frobenius and Faber-Krahn Type Theorems*, volume 1915 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, ISBN: [978-3-540-73510-6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-73510-6), DOI: [10.1007/978-3-540-73510-6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-73510-6).
- Febriantono, A., Munandar, A., & Ramadhan, M. R. (2024). Sifat-sifat graf irisan pada grup dihedral. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, 8(1):29–38, ISSN: 2581-0154, journal.unesa.ac.id/index.php/jram.
- Li, H. (2022). Properties and applications of graph laplacians. The University

- of Chicago Department of Mathematics, <https://math.uchicago.edu/~may/REU2022/REUPapers/Li,Hanchen.pdf>. REU Paper.
- Malik, D. S., Mordeson, J. N., & Sen, M. K. (2007). *Introduction to Abstract Algebra*. Department of Mathematics, Creighton University, United States.
- Mir, B. A., Atik, F., & Mondal, P. P. (2025). On the spectral analysis of power graph of dihedral groups. <https://arxiv.org/abs/2502.19914>.
- Munandar, A. (2022a). Modul pembelajaran aljabar linear elementer. Prodi Matematika, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
- Munandar, A. (2022b). *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*. Sleman : Deepublish (CV Budi Utama).
- Romdhini, M. U., Nawawi, A., Al-Sharqi, F., & Al-Quran, A. (2024). Spectral properties of power graph of dihedral groups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 17(2):591–603, DOI: [10.29020/nybg.ejpam.v17i2.5036](https://www.ejpam.com), <https://www.ejpam.com>.
- Selvia, S. M., Narwen, & Zulakmal (2015). Spektrum graf bintang S_n dan graf lengkap K_n untuk $n \geq 2$. *Jurnal Matematika UNAND*, 4(4):129–136, ISSN: 2303–2910.
- Williamson, D. P. & Chen, Y. (2019). Lecture 9: Normalized adjacency and laplacian matrices, <https://people.orie.cornell.edu/dpw/orie6334/Fall2016/>. Scribe notes for ORIE 6334: Bridging Continuous and Discrete Optimization, Cornell University.