

**MODEL MATEMATIKA UNTUK KONTROL CAMPAK  
MENGUNAKAN VAKSINASI**

**SKRIPSI**

**Untuk memenuhi sebagian persyaratan guna  
Memperoleh derajat Sarjana S-1**

**Program Studi Matematika**



**Diajukan oleh**

**Maesaroh Ulfa**

**08610003**

**Kepada**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UIN SUNAN KALIJAGA**

**YOGYAKARTA**

**2013**



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal :

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Maesaroh Ulfa

NIM : 08610003

Judul Skripsi : Model Matematika untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi MATEMATIKA Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 04 Februari 2013  
Pembimbing

**Sugiyanto, S.T., M.Si**  
NIP: 19800505 200801 1 028



Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga

FM-UINSK-BM-05-07/R0

**PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/650/2013

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Model Matematika untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :  
Nama : Maesaroh Ulfa  
NIM : 08610003  
Telah dimunaqasyahkan pada : 18 Februari 2013  
Nilai Munaqasyah : A-  
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

**TIM MUNAQASYAH :**

Ketua Sidang

Sugiyanto, M.Si  
NIP. 19800505 200801 1 028

Penguji I

Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si  
NIP.19800402 200501 1 003

Penguji II

Noor Saif Muth. Mussafi, M.Sc  
NIP.19820617 200912 1 005

Yogyakarta, 26 Februari 2013  
UIN Sunan Kalijaga  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Dekan



Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D  
NIP. 19580919 198603 1 002

## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Maesaroh Ulfa  
NIM : 08610003  
Prodi / Smt : Matematika / X  
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 5 Februari 2013  
yang menyatakan



**Maesaroh Ulfa**  
NIM: 08610003

## MOTTO

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا اسْتَعِينُوا بِالصَّبْرِ وَالصَّلَاةِ إِنَّ اللَّهَ مَعَ الصَّابِرِينَ

Hai orang-orang yang beriman, mintalah pertolongan (kepada Allah) dengan sabar dan (mengerjakan) shalat, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar **{Al-Baqoroh: 153}**

Kesulitan, semua kesulitan di dalam hidup ini adalah bagian dari suatu tatanan yang sempurna dan sifat yang paling pasti dari sistem tata surya ini.

**{Simon Piere De Laplace}**

Kejujuran adalah hal yang paling indah, meskipun menyakitkan.

**{Maesaroh Ulfa}**

## PERSEMBAHAN

*Teriring sujud syukur kehadirat-Nya dengan segala kerendahan hati*

*ku persembahkan karya sederhana ini untuk :*

*Allah SWT yang telah memberiku segala yang terbaik dalam hidupku*

*Dan dengan menunaikan kewajiban-Nyalah cara terbaik untuk mensyukuri*

*Nikmat dan Karunia-Nya.*

*Ibu, Bapak, Kakak-Kakak, dan Ponakanku tercinta untuk setiap tetes pengorbanan*

*dan doa yang tidak pernah henti, serta cinta kasih sayang,*

*dan segala yang utukku.*

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Assalamu'alaikum Wr. Wb*

*Alhamdulillahirobbil'aalaamiin* segala puji atas kehadiran Allah SWT dengan segala kuasa-Nya, rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya berupa iman, Islam, ihsan, dan ilmu, sehingga selesailah penulisan skripsi ini. Tak lupa shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, para keluarga, sahabat, dan pengikut Beliau.

Penyusunan skripsi yang berjudul “Model Matematika untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi” ini diajukan guna memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar kesarjanaan pada Program Studi Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.

Penyelesaian penulisan skripsi ini juga berkat dorongan dan dukungan serta bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan dan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A.,Ph.D. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga.
2. Muchammad Abrori., M.Kom. selaku Ketua Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga.
3. Sugiyanto, S.T., M.Si. Dosen pembimbing sekaligus dosen pembimbing akademik yang telah membimbing sehingga skripsi ini terselesaikan.
4. M. Wakhid Musthofa, M.Si dan Noor Saif Mussafi, M.Sc selaku penguji.

5. Eminugroho Ratna Sari, M.Si. Bundadari yang telah banyak memberikan dorongan, motivasi, keramahan, kesabaran, dan membimbing penulis sehingga dapat melampaui beberapa kesulitan dalam penyusunan skripsi ini.
6. Ibu Bapak tercinta, Eni Yuwanti, BA dan Mulyadi, S.Pd, MA yang telah memberiku dukungan moral maupun material, cinta, kasih sayang, dan doanya yang tulus agar anak-anaknya selalu diberikan yang terbaik oleh Allah SWT.
7. Kakak-kakakku Miftahul Ulum, SH.I dan Taufiq Ma'ruf, S.Psi yang memberikan dukungan dan arahnya.
8. Sahabat Trio Kwok-Kwokku tersayang, partnerku Laila Ma'rifatun yang setiap saat mau berbagi ilmunya dengan diskusi tentang skripsi ini dan Ria Andrian yang selalu memberikan semangat kepada kami.
9. Seorang teman yang selalu ada ketika saya membutuhkan bantuan. Terimakasih atas segala bantuanmu.
10. Teman-teman matematika 2008 yang selalu menemani dan memberikan semangat kepadaku hingga terselesaikannya penulisan ini.

Semoga Allah membalas amal kebaikan yang telah diberikan kepada penulis. Semoga penulisan ini mempunyai manfaat yang baik untuk kemajuan ilmu pengetahuan khususnya di bidang Matematika.

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Yogyakarta, 05 Februari 2013

Maesaroh Ulfa



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI .....	ii
HALAMAN PENGESAHAN .....	iii
HALAMAN KEASLIAN PENELITIAN .....	iv
HALAMAN MOTTO .....	v
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	vi
KATA PENGANTAR .....	vii
DAFTAR ISI .....	ix
DAFTAR GAMBAR .....	xi
DAFTAR SIMBOL .....	xii
INTISARI .....	xiii
ABSTRACT .....	xiv
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Perumusan Masalah .....	4
1.3. Batasan Masalah .....	4
1.4. Tujuan Penulisan .....	4
1.5. Manfaat Penulisan .....	5
1.6. Tinjauan Pustaka .....	5
1.7. Metode Penulisan .....	7
1.8. Sistematika Penulisan .....	8

<b>BAB II LANDASAN TEORI</b> .....	10
2.1. Aljabar Linier .....	10
2.2. Persamaan Differensial .....	16
2.3. Teori Sistem .....	18
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> .....	30
3.1. Formulasi Model .....	30
3.2. Titik Ekuilibrium .....	36
3.3. Kestabilan Titik Ekuilibrium .....	40
3.3.1 Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit .....	41
3.3.2 Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemi .....	47
3.4. Simulasi Model .....	53
3.4.1 Estimasi Parameter Model .....	54
3.4.2 Kasus dengan Efektifitas Vaksinasi berbeda .....	56
3.5. Strategi Mengoptimalkan Vaksinasi .....	60
<b>BAB IV PENUTUP</b> .....	62
4.1. Kesimpulan .....	62
4.2. Saran .....	63
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	64
<b>LAMPIRAN</b> .....	66

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1. Diagram transfer model matematika campak dengan vaksinasi..	31
Gambar 3.2. Poporsi Individu $S, E, I$ dan $R$ .....	57
Gambar 3.3. Pengaruh Vaksinasi terhadap Kelas $S$ .....	58
Gambar 3.4. Pengaruh Vaksinasi terhadap Kelas $R$ .....	59

## DAFTAR SIMBOL

$S(t)$  = jumlah populasi rentan pada waktu tertentu

$E(t)$  = jumlah populasi ekspos pada waktu tertentu

$I(t)$  = jumlah populasi infeksi pada waktu tertentu

$R(t)$  = jumlah populasi sembuh pada waktu tertentu

$N$  = jumlah populasi

$b$  = angka kelahiran

$\mu$  = angka kematian alami

$\beta$  = angka kontak

$\sigma$  = angka infektivitas

$\gamma$  = angka kesembuhan

$\delta$  = angka kematian karena campak

$p$  = proporsi sukses vaksinasi pada kelahiran

$R_0$  = nomor reproduksi dasar

$R_p$  = nomor reproduksi dasar dengan vaksinasi

$p_c$  = vaksinasi minimal

$R^n$  = himpunan vektor dengan entri-entrinya merupakan bilangan real, berbentuk

$n$  baris dan 1 kolom.

■ = pembuktian terbukti

**INTISARI**

**MODEL MATEMATIKA UNTUK KONTROL CAMPAK**

**MENGGUNAKAN VAKSINASI**

**Oleh:**  
**Maesaroh Ulfa**  
**(08610003)**

Penyakit Campak (Rubeola, Campak 9 hari, measles) adalah suatu infeksi virus yang sangat menular, yang ditandai dengan demam, batuk, konjungtiva (peradangan selaput ikat mata) dan ruam kulit. Penyakit ini disebabkan karena infeksi virus campak golongan *Paramyxovirus*. Penyakit ini juga dapat menyebabkan kematian. Vaksinasi menjadi strategi yang paling efektif untuk memerangi penyakit ini. Vaksinasi biasanya diberikan pada anak-anak. Penulisan ini bertujuan untuk membentuk model penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi, membentuk titik keseimbangan dan melakukan analisis kestabilan, membuat simulasi model dan mengintrepertasikannya, dan mengetahui rancangan untuk mengoptimalkan cakupan vaksinasi yang diperlukan sehingga dapat mengurangi penyebaran penyakit ini.

Penulisan tugas akhir ini dilakukan dengan menggunakan metode studi literatur. Penulisan ini diharapkan dapat memberikan gambaran umum tentang model matematika untuk kontrol campak menggunakan vaksinasi dengan pembagian kelas SEIR. Langkah-langkah yang dilakukan yaitu mengidentifikasi masalah, menyusun asumsi-asumsi untuk menyederhanakan model, membuat diagram transfer, mendefinisikan parameter-parameter, menentukan titik-titik ekuilibrium kemudian melakukan analisis kestabilan, mensimulasikan model, dan membentuk rancangan untuk mengoptimalkan vaksinasi.

Selanjutnya dari penulisan ini dapat diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit dan endemik beserta kestabilannya. Berdasarkan hasil yang diperoleh, dilakukan simulasi dengan mengambil data di Yogyakarta, dan diperoleh cakupan vaksinasi dengan dua dosis dapat meningkatkan kekebalan kawanan dengan cakupan vaksinasi yang lebih rendah.

**Kata kunci: campak, vaksinasi, optimal, SEIR, kekebalan kawanan**

**ABSTRACT**

**MATHEMATICAL MODEL FOR CONTROL OF MEASLES  
BY VACCINATION**

**By:**  
**Maesaroh Ulfa**  
**(08610003)**

Measles (also known as Rubeola, measles 9 day) is a highly contagious virus infection, characterized by fever, cough, conjunctiva (inflammation of the tissue lining of the eye) and skin rash. The disease is caused by infection of measles virus *paramyxovirus* cluster. It is a deadly disease. Vaccination is the most effective strategy to prevent the disease. It is generally given to children. This research aims to establish a model of the effect of measles vaccination, forming the point of equilibrium and analyze the stability, create a simulation model and interpret them, and to know the design to optimize the vaccination coverage required, so it can reduce the spread of this disease.

This research was conducted by the method of literature study. It is expected to provide an overview of the mathematical model used to control measles vaccination with division of classes SEIR. The steps taken is identifying the problem, formulating assumptions to simplifying the model, making the transfer diagram, defining parameters, determining the equilibrium points and analyzing the stability, simulating the model, and forming the design to optimize the vaccination.

Then from this research can be obtained free balance point of endemic and diseases and their stability. Based on the results obtained, the simulation is done by taking the data in Yogyakarta, and obtained vaccination coverage with two doses that can increase the herd immunity with lower vaccination coverage.

**Keywords: measles, vaccination, optimization, SEIR, herd immunity**

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika memberikan peranan penting dalam membantu menganalisa dan mengontrol penyebaran penyakit. Kejadian-kejadian yang ada di sekitar dapat diamati dan dianalisis dalam bentuk model matematika.

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku suatu permasalahan yang nyata. Model matematika dibuat berdasarkan asumsi-asumsi. Model matematika yang telah dibentuk akan dilakukan analisa, agar model yang dibuat representatif terhadap permasalahan yang dibahas. Banyak permasalahan yang timbul dari berbagai bidang ilmu, misalnya bidang kesehatan, kimia, biologi, dan lain-lain yang dapat dibuat model matematikanya.<sup>1</sup> Salah satunya adalah model matematika penyakit campak.

Penyakit *measles* (campak) adalah suatu infeksi virus yang sangat menular, yang ditandai dengan nyeri ditenggorokan, demam, batuk, dan ruam kulit. Penyakit ini disebabkan karena infeksi virus campak bernama *Paramyxovirus*.<sup>2</sup> Penyakit tersebut dapat menyebar melalui kontak langsung dengan penderita, udara, batuk atau bersin, dan kotoran manusia. Penyakit ini dapat menyerang siapa saja tanpa mengenal jenis kelamin maupun usia. Namun, penyakit ini lebih banyak menyerang anak-anak daripada orang dewasa. Hal ini disebabkan oleh

---

<sup>1</sup> Ekawati, Aminah. Jurnal: *Kestabilan Model SEIR*. Universitas Borneo Tarakan.

<sup>2</sup> <http://www.anneahira.com/campak.htm>, diakses tanggal 18 September 2012, pukul 22:26 WIB.

daya tahan tubuh anak-anak yang relatif lebih lemah dibanding orang dewasa. Menurut World Health Organization (WHO)<sup>3</sup>, sekitar 164.000 anak diseluruh dunia meninggal dunia setiap tahun karena penyakit campak.

Salah satu cara untuk mencegah penyakit ini adalah dengan vaksinasi. Vaksinasi diberikan dengan memberikan vaksin (bahan antigenik yang digunakan untuk menghasilkan kekebalan aktif terhadap suatu penyakit sehingga dapat mencegah atau mengurangi pengaruh infeksi oleh organisme) kedalam tubuh seseorang untuk memberikan kekebalan terhadap penyakit tersebut.<sup>4</sup>

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika juga turut memberikan peranan yang penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit. Peranan tersebut berupa model matematika yang mempelajari model matematika. Model untuk menganalisis penyebaran penyakit diantaranya ada model epidemi *SIR (Susceptible-Infected-Recovered)*, *SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Recovered)*, dan lainnya.

Pada sebagian kasus, terdapat penyakit yang dapat memasuki kondisi endemik. Kondisi ini diartikan sebagai kondisi dimana penyakit menyebar pada suatu wilayah dalam kurun waktu yang sangat lama. Kondisi ini juga terjadi pada penyakit campak. Faktor kelahiran dan kematian perlu diperlihatkan dalam model ini karena penyebaran penyakit campak terjadi dalam kurun waktu yang sangat lama.

---

<sup>3</sup> <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs286/en/>, diakses tanggal 5 april 2012 pukul 20:19 WIB

<sup>4</sup> <http://www.anneahira.com/manfaat-imunisasi-campak.htm>, diakses tanggal 18 September 2012 pukul 22:29 WIB



Titik-titik dalam sistem yang dapat diamati pada keadaan stasioner atau setimbang disebut titik kesetimbangan. Konsep perilaku sistem pada titik kesetimbangan dikenal sebagai titik kestabilan. Kestabilan ini merupakan informasi untuk menggambarkan perilaku sistem. Oleh karena itu, dalam model endemik *SEIR* dengan memperhatikan faktor vaksinasi perlu ditentukan kestabilan di titik kesetimbangan untuk mengetahui dan menginterpretasikan perilaku model.

Dalam penulisan tugas akhir ini penulis memakai model epidemi *SEIR* karena dalam pemodelan akan digunakan asumsi masa inkubasi. Dalam model ini populasi dibagi menjadi empat kelompok yaitu kelompok individu yang rentan (sehat tetapi dapat terinfeksi) penyakit (*susceptible*), kelompok individu yang terdeteksi penyakit tetapi belum terinfeksi (*exposed*), kelompok individu yang terinfeksi dan dapat sembuh dari penyakit (*infected*), dan kelompok individu yang sembuh dan kebal dari penyakit (*recovered*). Model ini menggambarkan alur penyebaran penyakit dari kelompok individu *susceptible* menjadi *exposed* melalui kontak langsung maupun perantara lain. Individu *exposed* menjadi *infected* ketika ketahanan tubuh menurun. Kemudian individu *infected* yang mampu bertahan hidup akan sembuh dan memasuki kelompok *recovered*.

Dalam tugas akhir ini akan dianalisis tentang pengaruh sukses vaksinasi dalam penyebaran penyakit campak. Analisis model ini untuk mengetahui perilaku penyebaran campak di suatu populasi.

## 1.2. Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang dibahas adalah

1. Bagaimana membuat model matematika penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi?
2. Bagaimana cara menganalisis titik keseimbangan dan melakukan analisis kestabilan titik keseimbangan?
3. Bagaimana menginterpretasikan model dengan melakukan simulasi model?
4. Bagaimana strategi mengoptimalkan vaksinasi?

## 1.3. Batasan Masalah

Pada penulisan ini permasalahan dibatasi pada penyakit campak dengan model SEIR (*Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered*). Angka kelahiran dalam populasi diasumsikan sama dengan angka kematian. Pengaruh migrasi diabaikan sehingga penyebaran penyakit bersifat tertutup dalam suatu populasi.

## 1.4. Tujuan Penulisan

Berdasarkan perumusan masalah, penulisan ini bertujuan untuk:

1. Memodelkan penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi,
2. Menentukan titik keseimbangan dan melakukan analisis kestabilan,
3. Menginterpretasikan model dengan melakukan simulasi model,
4. Mengetahui strategi mengoptimalkan vaksinasi.

### **1.5. Manfaat Penulisan**

Hasil penulisan ini diharapkan mempunyai manfaat bagi pembaca para umumnya dan penulis pada khususnya, selain itu diharapkan:

1. Dapat menambah pengetahuan di bidang matematika khususnya tentang model matematika suatu penyakit,
2. Memberikan masukan kepada penulis lain yang ingin mengembangkan penulisan tentang model penyebaran penyakit campak,
3. Bagi lembaga UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di prodi matematika.

### **1.6. Tinjauan Pustaka**

Penulisan skripsi ini merujuk pada beberapa jurnal dan tugas akhir sebagai acuan.

1. Jurnal yang ditulis oleh Moussa Tessa (Abdou Moumouni University, Niamey, Niger): “Mathematical Model for Control of Measles by Vaccination”
2. Jurnal yang ditulis oleh Aminah Ekawati (Universitas Borneo Tarakan): “Kestabilan Model SEIR”
3. Skripsi yang ditulis oleh Susilo Nugroho (Universitas Sebelas Maret): “Pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Endemi SIR”

Penulisan-penulisan di atas memberikan inspirasi untuk melakukan penulisan lebih lanjut mengenai model matematika SEIR campak dengan pengaruh

vaksinasi dan mengambil data di daerah Yogyakarta. Perbedaan antara penelitian satu dengan yang lainnya dapat dilihat pada tabel berikut :

**Tabel 1.1 Pemetaan Penulisan**

No.	Nama Peneliti	Judul Penelitian	Perbedaan
1.	Ousman Moussa Tessa (2006)	Mathematical Model for Control of Measles by Vaccination	Dalam penelitian ini dibahas mengenai pembentukan diagram transfer model matematika campak dengan pengaruh vaksinasi beserta kestabilan model tersebut dan strategi mengoptimalkan vaksinasi.
2.	Aminah Ekawati	Kestabilan Model SEIR	Penelitian ini membahas mengenai langkah-langkah menentukan titik ekuilibrium model SEIR tanpa pengaruh vaksinasi beserta analisis kestabilannya.
3.	Susilo Nugroho (2009)	Pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Endemi SIR	Pada penelitian ini dibahas mengenai pembentukan model SIR dengan pengaruh vaksinasi, langkah-langkah menentukan titik ekuilibrium kemudian melakukan analisis model, dan

			menginterpretasikan model dengan menerapkan contoh kasus
4.	Maesaroh Ulfa (2013)	Model Matematika untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi	Pada penelitian ini dibahas mengenai model matematika campak dengan pengaruh vaksinasi pada model SEIR, menentukan titik ekuilibrium beserta analisis kestabilannya, dan simulasinya diambil dari data di daerah Yogyakarta.

### 1.7. Metode Penulisan

Penulisan dilakukan dengan cara studi literatur. Penulisan dimulai dengan mempelajari jurnal-jurnal, tugas akhir, artikel dari internet, dan buku-buku yang berhubungan dengan penyakit campak, membuat asumsi-asumsi, mendefinisikan parameter yang digunakan pada model seperti: angka kelahiran, angka kematian alami, angka kematian karena penyakit campak, koefisien kontak dan proporsi sukses vaksinasi pada kelahiran. Setelah itu, membuat diagram transfer model penyebaran penyakit campak dan berdasarkan diagram transfer tersebut dituliskan model matematika penyebaran penyakit campak.

Selanjutnya menentukan titik-titik ekuilibrium model tersebut dengan menggunakan definisi titik ekuilibrium suatu sistem persamaan diferensial. Setelah menentukan titik-titik ekuilibrium model tersebut. Untuk menyelidiki kestabilan lokal dilakukan linearisasi pada sistem dengan menentukan matriks jacobian di titik ekuilibrium. Sifat kestabilan lokal titik ekuilibrium dapat ditentukan asalkan titik tersebut hiperbolik. Selanjutnya menentukan nilai eigen dari matriks jacobian tersebut dengan menggunakan definisi polynomial karakteristik suatu matriks. Salah satu alternatif menentukan nilai eigen polynomial karakteristik suatu matriks digunakan juga teorema Routh Hurwitz.

Setelah sifat kestabilan titik ekuilibrium model diselidiki, langkah terakhir adalah melakukan simulasi pada model dengan memberikan nilai parameter-parameter berbeda yang bertujuan untuk mengilustrasikan perilaku populasi pada model yang dibentuk. Hasil dari simulasi disajikan dalam bentuk grafik. Kemudian dilakukan perhitungan untuk menghitung pengoptimalan vaksinasi.

### **1.8. Sistematika Penulisan**

Penulisan tugas akhir ini dibagi menjadi 4 bab dengan rincian masing-masing bab sebagai berikut:

#### **BAB I PENDAHULUAN**

Membahas mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, tinjauan pustaka, metode penulisan, dan sistematika penulisan yang memberikan gambaran singkat mengenai isi dari skripsi ini.

## BAB II LANDASAN TEORI

Membahas tentang teori-teori penunjang yang akan digunakan dalam bab selanjutnya, meliputi teori-teori dasar aljabar linear, persamaan differensial, dan teori sistem.

## BAB III PEMBAHASAN

Membentuk dan membahas model SEIR penyakit campak beserta kestabilannya berdasarkan titik ekuilibrium model tersebut. Selanjutnya mensimulasikan model dan mengoptimalkan vaksinasi.

## BAB IV PENUTUP

Berisi kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan yang telah dilakukan.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model matematika untuk kontrol campak menggunakan vaksinasi dapat diekspresikan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = b(1-p)N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - (\sigma + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - (\gamma + \mu + \delta)I$$

$$\frac{dR}{dt} = bpN + \gamma I - \mu R$$

2. Model tersebut mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu

$$E_0 = \left( \frac{b(1-p)N}{\mu}, 0, 0, \frac{bpN}{\mu} \right) \quad \text{dan} \quad E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*) \quad \text{dengan}$$

$$S^* = \frac{(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)N}{\sigma\beta}, \quad E^* = \frac{(\beta\sigma b(1-p) - \mu(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta))N}{\beta\sigma(\sigma + \mu)},$$

$$I^* = \frac{(\beta\sigma b(1-p) - \mu(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta))N}{\beta(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)},$$

$$R^* = \frac{bpN}{\mu} + \left( \frac{(\beta\sigma b(1-p) - \mu(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta))\gamma N}{\mu\beta(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)} \right).$$



3. Titik ekuilibrium  $E_0$  stabil asimtotik lokal untuk  $R_p < 1$ . Titik ekuilibrium  $E_1$  stabil asimtotik lokal untuk  $R_p > 1$ .
4. Tingkat vaksinasi yang dibutuhkan untuk mencegah penyebaran penyakit dapat diekspresikan sebagai  $p_c = 1 - \frac{1}{R_0}$ .
5. Cakupan vaksin optimal yang diperlukan sehingga dapat mengurangi penyebaran penyakit adalah 0,77 dengan melakukan dua kali vaksinasi.

#### 4.2. Saran

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis membahas waktu vaksinasi yang diperlukan agar meminimalisir penyebaran penyakit. Dalam penelitian ini diasumsikan laju kelahiran sama dengan laju kematian. Faktor-faktor lain seperti biaya vaksinasi dan imigrasi tidak diperhatikan dalam penelitian ini. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada masalah ini untuk mengembangkan model ini dengan memperhatikan pengaruh biaya vaksinasi, laju kelahiran yang tidak sama dengan laju kematian, imigrasi, dan model campak dengan vaksinasi pulse (berkala).

## DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Erlangga : Jakarta.
- Bender, E.A. 1978. *An Introduction to Mathematical Modelling*. USA
- Ekawati, Aminah. Jurnal: *Kestabilan Model SEIR*. Universitas Borneo: Tarakan.
- Hahn, W. 1967. *Stability of Motion*. Springer-Verlag : New York.
- Juli Iswanto, Ripno. 2012. *Pemodelan Matematika*. Graha Ilmu: Yogyakarta.
- Murray, J.D. 1993. *Mathematical Biology*. Springer-Verlag : Berlin.
- Nugroho, Susilo. 2009. Skripsi: *Pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Endemi SIR*. Universitas Sebelas Maret: Surabaya.
- Olsder, G.J. 1994. *Mathematical System Theory*. Delft University of Technology : Belanda.
- Ousman, Moussa Tessa. 2006. Jurnal: *Mathematical for control of measles by vaccination*. Abdou Moumouni University Niamey : Niger.
- Perko, Lawrence. 1991. *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York.
- Ross, S.L. 1984. *Differential Equations*. Singapore.
- Schaum's Easy Outlines. 2002. *Aljabar Linear*. Erlangga : Jakarta.
- <http://rustam-sentramedia.tripod.com/campak.htm>, diakses 8 Januari 2013 pukul 16:24 WIB
- <http://www.ispub.com/journal/the-internet-journal-of-infectious-diseases/volume-2-number-1/deterministic-modeling-of-infectious-diseases-applications-to-measles-and-other-similar-infections.html#e-3>, diakses 29 Desember 2012 pukul 02:53 WIB
- <http://www.bt.cdc.gov/agent/smallpox/training/overview/pdf/eradicationhistory.pdf>, p.17. diakses tanggal 8 Januari 2013 pukul 17:17 WIB
- <http://www.anneahira.com/manfaat-imunisasi-campak.htm>, diakses tanggal 18 September 2012 pukul 22:29 WIB
- <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs286/en/>, diakses tanggal 5 april 2012 pukul 20:19 WIB

<http://www.anneahira.com/campak.htm>, diakses tanggal 18 September 2012,  
pukul 22:26 WIB.

[http://dinkes.jogjaprovo.go.id/files/NARASIPROFIL\\_2010\\_1.pdf](http://dinkes.jogjaprovo.go.id/files/NARASIPROFIL_2010_1.pdf), diakses 8  
Januari 2013 pukul 16:10 WIB.

## CURRICULUM VITAE

Nama Lengkap : Maesaroh Ulfa  
Tempat, tgl. Lahir : Sleman 17 Januari 1990  
Jenis Kelamin : Perempuan  
Pendidikan terakhir : SMA  
Agama : Islam  
Alamat : Mesan No. 19 RT. 01/RW.031 Sinduadi, Mlati, Sleman,  
Yogyakarta 55284  
HP : 08975844877

### **Riwayat Pendidikan :**

1. TK ABA Blunyah Gede, 1996.
2. SD, Madrasah Ibtidaiyah Negeri Yogyakarta I, lulus tahun 2002.
3. SLTP, Madrasah Tsanawiyah Negeri Yogyakarta I, lulus tahun 2005.
4. SLTA, MAN Yogyakarta I, lulus tahun 2008.

### **Pengalaman Kerja:**

- Entry Data hasil survey kesehatan keluarga dan lingkungan, PLAN Unit Rembang, PLAN Internasional 2005.
- Entry Data hasil survey nasional (PISA dan TIMMS) Pusat Penilaian Pendidikan Balitbang Depdiknas 2006-2007