

SKRIPSI

**MODEL ALJABAR MAX-PLUS UNTUK SINKRONISASI
JADWAL BUS PADA JARINGAN IRREGULAR DENGAN
KARAKTERISTIK MATRIKS REDUKSIBEL**



HUMAIROH WAHIDATUL IZZAH

22106010072

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2026

**MODEL ALJABAR MAX-PLUS UNTUK SINKRONISASI
JADWAL BUS PADA JARINGAN IRREGULAR DENGAN
KARAKTERISTIK MATRIKS REDUKSIBEL**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



diajukan oleh

HUMAIROH WAHIDATUL IZZAH

22106010072

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2026



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu 'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Humairoh Wahidatul Izzah

NIM : 22106010072

Judul Skripsi : Model Aljabar Max-plus untuk Sinkronisasi Jadwal Bus pada Jaringan Irreguler dengan Karakteristik Matriks Reduksibel

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu 'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 12 Mei 2026

Pembimbing

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom

NIP. 19720423 199903 1 003



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1202/Un.02/DST/PP.00.9/06/2026

Tugas Akhir dengan judul : Model Aljabar Max-plus untuk Sinkronisasi Jadwal Bus pada Jaringan Irreguler dengan Karakteristik Matriks Reduksibel

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : HUMAIROH WAHIDATUL IZZAH
Nomor Induk Mahasiswa : 22106010072
Telah diujikan pada : Senin, 25 Mei 2026
Nilai ujian Tugas Akhir : A-

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom

SIGNED

Valid ID: 6a224e1f72d08



Penguji I

Arif Munandar, M.Sc.

SIGNED

Valid ID: 6a2248752b1fb



Penguji II

Prof. Dr. Muhammad Wakhid Musthofa,

S.Si., M.Si.

SIGNED

Valid ID: 6a1f955f69a34



Yogyakarta, 25 Mei 2026

UIN Sunan Kalijaga

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

SIGNED

Valid ID: 6a22603f51b36

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Humairoh Wahidatul Izzah
NIM : 22106010072
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 11 Mei 2026



Humairoh Wahidatul Izzah

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



Tiada lembar paling indah dari skripsi ini kecuali halaman persembahan. Skripsi ini penulis persembahkan untuk: Diri sendiri, yang telah berproses, bertahan, dan menyelesaikan setiap langkah hingga sampai pada titik ini. Setiap kalimat di skripsi ini adalah jejak langkah dalam sabar dan saksi dari janji Allah. Sebab, skripsi ini bukan hanya tentang ilmu, tapi juga tentang iman yang diuji waktu. *I am truly proud of how far I've come.* Keluarga tersayang, yang selalu menjadi tempat pulang dan sumber doa dalam setiap perjalanan. Almamater tercinta, yang telah menjadi tempat penulis belajar, bertumbuh, dan menemukan banyak pengalaman berharga.

HALAMAN MOTTO

Rencanakan, biar Tuhan yang menentukan.

Tugas kita berusaha, urusan hasil bukan ranah manusia.

(Ibunda tercinta)

Belajar itu harus, pinter itu bonus

(Penulis)

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

إِنْ أَحْسَنْتُمْ أَحْسَنْتُمْ لِنَفْسِكُمْ

”Jika kamu berbuat baik, (berarti) kamu berbuat baik untuk dirimu sendiri.”

(QS. Al-Baqarah: 152)

Hiduplah sebagaimana orang hidup

(Jeisinta Hana Hanifah)

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur atas kehadiran Allah Swt. yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Model Aljabar Max-plus untuk Sinkronisasi Jadwal Bus pada Jaringan Irreguler dengan Karakteristik Matriks Reduksibel". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Deddy Rahmadi, M.Sc selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
4. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.

6. Kepada orang tua tercinta sebagai sumber kekuatan penulis, yang berperan penting dalam menyelesaikan pendidikan penulis. Dimana beliau yang senantiasa memberikan doa, kasih sayang, dukungan, serta pengorbanan yang tiada henti.
7. Kepada saudara penulis, terima kasih atas doa, dukungan, dan kebersamaan yang selalu menguatkan dalam setiap langkah hingga skripsi ini dapat terselesaikan.
8. Kepada keluarga besar Bani Syafi'i dan Pondok Pesantren Asy-Syafiiyah Gresik atas segala limpahan ilmu, bimbingan spiritual, serta doa yang tiada henti. Semoga karya ini menjadi bagian dari keberkahan (tabarruk) atas ilmu-ilmu yang telah beliau ijazahkan kepada penulis.
9. Terima kasih kepada member grup "Pentagon Rajin Tahajud" yang telah mewarnai sebagian besar perjalanan perkuliahan penulis.
10. Terima kasih kepada kawan seperjuangan KKN Gesikan 191 yang telah menjadi bagian dari petualangan dan pengalaman yang luar biasa selama 45 hari.
11. Terima kasih kepada teman-teman konsentrasi Aljabar dan Matematika Terapan yang menjadi teman diskusi dari proses penyusunan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 8 Maret 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMBANG	xiv
INTISARI	xv
ABSTRACT	xvi
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Rumusan Masalah	4
1.3. Batasan Masalah	5
1.4. Tujuan Penelitian	6
1.5. Manfaat Penelitian	7
1.6. Tinjauan Pustaka	8
1.7. Metode Penelitian	11
1.8. Sistematika Penulisan	12
II DASAR TEORI	14

2.1. Semiring	14
2.2. Aljabar Max-Plus	17
2.2.1. Sifat-sifat Aljabar Max-Plus	21
2.2.2. Vektor dan Matriks atas Aljabar Max-plus	25
2.3. Graf Berarah dan Berbobot	31
2.3.1. Pengertian Graf	31
2.3.2. Graf Berarah	32
2.3.3. Terminologi pada Graf dan Matriks	34
2.3.4. Sistem Persamaan Linear pada Aljabar Max-plus	39
2.3.5. Nilai Eigen dan Vektor Eigen	40
2.3.6. Algoritma Power	46
III HASIL DAN PEMBAHASAN	61
3.1. Struktur Sistem Jaringan Layanan Bus TransJatim Koridor 1	61
3.2. Model Graf Berarah	65
3.3. Model Aljabar Max-plus	73
3.4. Pembentukan Matriks Aljabar Max-plus dan Representasinya	76
3.5. Desain Penjadwalan Bus	79
IV KESIMPULAN DAN SARAN	83
4.1. Kesimpulan	83
4.2. Saran	84
DAFTAR PUSTAKA	84
LAMPIRAN	88
A Input/Kode Mencari Nilai Eigen dan Vektor Eigen dengan Menggunakan <i>software</i> Scilab 5.5.2	88
B Output	92
C Hasil Matriks Aljabar Max-plus Menggunakan <i>Software</i> Scilab 5.5.2	95

Curriculum Vitae	99
-----------------------------------	-----------



DAFTAR TABEL

1.1	Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian	10
2.1	Urutan Waktu dan Keberangkatan Bus	55
2.2	Pendefinisian Variabel	56
3.1	Jarak Tempuh Bus Trans Jatim Koridor 1 Rute 1	64
3.2	Jarak Tempuh Bus Trans Jatim Koridor 1 Rute 2	65
3.3	Waktu Tempuh Bus Trans Jatim Koridor 1 Rute 1	66
3.4	Waktu Tempuh Bus Trans Jatim Koridor 1 Rute 2	67
3.5	Pendefinisian Variabel Waktu Keberangkatan Rute 1 dan Rute 2 . . .	73

DAFTAR GAMBAR

1.1	<i>Flowchart</i> Penelitian	12
2.1	Graf Sederhana	32
2.2	Graf Berarah	33
2.3	Graf Berarah dan Berbobot	33
2.4	Graf Terhubung Kuat	35
2.5	<i>Flowchart</i> Algoritma <i>Power</i> pada Aljabar Max-Plus	50
2.6	Jalur Sistem Bus Sederhana	55
3.1	Representasi Graf Bus Trans Jatim Koridor 1	68

DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli termasuk nol
$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan riil
$\mathbb{R}_{\max}$	: Himpunan semua bilangan real diperluas dengan ε dan e
ε	: Elemen netral untuk operasi $\oplus$, setara dengan $-\infty$
e	: Elemen identitas untuk operasi $\otimes$, setara dengan 0
$a \oplus b$	: Operasi maksimum, $a \oplus b = \max(a, b)$
$a \otimes b$	: Operasi penjumlahan, $a \otimes b = a + b$
$a^{\otimes k}$	: Perpangkatan dalam max-plus, $a^{\otimes k} = k \cdot a$
$\bigoplus_{i=1}^n a_i$	: Jumlah maksimum dari n elemen
$\bigotimes_{i=1}^n a_i$	: Jumlah penjumlahan dari n elemen
λ	: Nilai eigen atas aljabar max plus
$\mathcal{G}(\overline{A})$	: Representasi graf berarah
■	: akhir suatu bukti
□	: akhir suatu contoh
$\Leftrightarrow$	: jika dan hanya jika

INTISARI

Model Aljabar Max-Plus untuk Sinkronisasi Jadwal Bus pada Jaringan

Irregular dengan Karakteristik Matriks Reduksibel

Oleh

HUMAIROH WAHIDATUL IZZAH

22106010072

ABSTRAK

Kawasan Gerbangkertosusilo merupakan kawasan metropolitan dengan tingkat mobilitas dan interaksi berbagai fungsi kota yang sangat tinggi. Kondisi tersebut mengakibatkan tekanan yang besar pada infrastruktur transportasi dan berpotensi memperburuk kemacetan lalu lintas, terutama pada jam sibuk di rute-rute utama kawasan metropolitan tersebut. Guna menekan permasalahan ini, pemerintah daerah melakukan langkah preventif dengan mengoperasikan layanan Bus Trans Jatim. Kendati demikian, ketidaktepatan jadwal keberangkatan armada masih menjadi kendala operasional yang kerap terjadi. Masalah penataan jadwal ini dapat diurai penjelasannya melalui pendekatan teori graf berarah berbobot, serta aljabar max-plus. Dalam penelitian ini, model graf berarah berbobot diterapkan pada rute Bus Trans Jatim koridor 1. Kedua representasi tersebut disusun menggunakan pemodelan sistem antrean dengan beberapa asumsi dasar agar pergerakan armada dapat berjalan secara stabil. Selanjutnya, model aljabar max-plus dibangun berdasarkan visualisasi graf dan petri net yang telah dirancang sebelumnya. Model sistem antrean tersebut menghasilkan matriks aljabar max-plus yang bersifat reduksibel karena karakteristik lintasan rute yang tidak terhubung kuat. Melalui penerapan algoritma power untuk matriks reduksibel tersebut dalam mencari nilai periodiknya, ditemukan nilai eigen $\lambda = 11.6$ yang mengindikasikan bahwa bus akan diberangkatkan setiap 11.6 menit sekali.

Kata kunci : aljabar max-plus, graf berarah dan berbobot, matriks reduksibel, nilai eigen, vektor eigen.

ABSTRACT

Max-Plus Algebra Model for Bus Schedule Synchronization on Irregular Networks

By

HUMAIROH WAHIDATUL IZZAH

22106010072

The Gerbangkertosusilo area is a metropolitan region characterized by highly intensive mobility and interactions among various urban functions. This condition places a significant strain on the transportation infrastructure and potentially exacerbates traffic congestion, particularly during peak hours along the metropolitan area's primary routes. To mitigate this issue, the regional government has implemented preventive measures by operating the Trans Jatim Bus service. Nonetheless, the inconsistency in fleet departure schedules remains a frequent operational constraint. This scheduling problem can be analyzed and resolved using a weighted directed graph approach and max-plus algebra. In this study, the weighted directed graph model is applied to the Trans Jatim Bus route for Corridor 1. Both representations are structured utilizing a queueing system model based on several fundamental assumptions to ensure the stable movement of the fleet. Furthermore, the max-plus algebra model is constructed based on the previously designed graph and petri net visualizations. The queueing system model generates a max-plus algebra matrix that is reducible due to the characteristics of the route paths, which are not strongly connected. By applying the power algorithm for reducible matrices to determine its periodic value, an eigenvalue of $\lambda = 11.6$ was obtained. This indicates that a bus will depart every 11.6 minutes from each bus stop to the next, in accordance with the modeled route.

Keyword : Max-plus algebra, weighted directed graph, reducible matrix, eigen value, eigen vector.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Kawasan Gerbangkertosusila merupakan wilayah metropolitan terbesar kedua di Indonesia setelah Jabodetabek, yang berfungsi sebagai pusat pertumbuhan ekonomi dan aktivitas masyarakat di Provinsi Jawa Timur dengan jumlah penduduk dan mobilitas tinggi (JDIH Kemenko Bidang Infrastruktur dan Pembangunan Kewilayahan, 2022). Gerbangkertosusila terdiri dari beberapa wilayah kabupaten/kota yang saling terintegrasi. Wilayah ini tidak hanya menjadi penopang perekonomian daerah, tetapi juga mengalami intensifikasi penggunaan ruang perkotaan dan jaringan transportasi, yang berkontribusi pada meningkatnya volume kendaraan di jalan. (Anggraeni et al., 2024)

Tingginya mobilitas dan interaksi berbagai fungsi kota mengakibatkan tekanan pada infrastruktur transportasi dan berpotensi memperburuk kemacetan, terutama pada jam sibuk di rute-rute utama kawasan metropolitan tersebut. Permasalahan lalu lintas di kawasan metropolitan umumnya disebabkan oleh ketidakseimbangan antara pertumbuhan kendaraan dan kapasitas jalan. (Anggraeni et al., 2024)

Transportasi umum dapat dijadikan solusi untuk mengurangi angka kemacetan. Beralihnya pengguna kendaraan pribadi ke transportasi umum dapat mengurangi kepadatan jalan raya, menghemat penggunaan bahan bakar dan mengurangi polusi udara. Karena kawasan Gerbangkertosusila merupakan lintas wilayah, Pemerintah Propinsi Jawa Timur menggagas inovasi Bus Trans Jatim yang akan meng-

oneksikan kawasan Gerbangkertosusila. Bersama Dishub Jawa Timur, luncurkan layanan Bus Trans Jatim yang menghubungkan koridor Gresik–Surabaya–Sidoarjo. (JawaPos, 2022)

Seiring dengan implementasi layanan Bus Transjatim sejak Agustus 2022, kebutuhan akan sistem transportasi publik yang mampu mengurangi kemacetan di kawasan Gerbangkertosusila semakin menonjol. Mobilitas masyarakat yang tinggi pada koridor Gresik–Surabaya–Sidoarjo menyebabkan volume kendaraan pribadi terus meningkat sehingga mendorong perlunya alternatif perjalanan yang lebih efisien. Kehadiran Bus Trans Jatim menunjukkan adanya peluang bagi masyarakat untuk beralih ke moda transportasi umum, namun efektivitas layanan tersebut sangat bergantung pada ketepatan jadwal dan keteraturan waktu kedatangan serta keberangkatan bus. Oleh karena itu, diperlukan suatu pendekatan matematis yang mampu memodelkan hubungan waktu secara sistematis dan menghasilkan penjadwalan yang stabil. Dalam konteks ini, aljabar max-plus menjadi metode yang relevan untuk menganalisis dan menyusun sistem penjadwalan bus yang lebih terstruktur sehingga dapat mendukung upaya pengurangan kemacetan dan peningkatan kualitas layanan transportasi umum. (Šfiligoj & Peperko, 2025) Namun, dalam praktiknya, jaringan rute transportasi tidak selalu membentuk sistem yang terhubung kuat. Pada layanan Trans Jatim, terdapat kemungkinan bahwa tidak semua halte saling terhubung secara langsung maupun tidak langsung dalam satu siklus perjalanan, sehingga struktur graf yang terbentuk bersifat tidak terhubung kuat. Kondisi ini menyebabkan matriks transisi yang diperoleh bersifat reduksibel (*reducible*). Karakteristik matriks reduksibel ini menimbulkan tantangan dalam analisis aljabar max-plus, khususnya dalam menentukan nilai eigen dan kestabilan sistem penjadwalan. Oleh karena itu, diperlukan kajian lebih lanjut mengenai model pen-

jadwalan berbasis aljabar max-plus pada jaringan yang bersifat irregular dengan matriks reduksibel. Aljabar max-plus menyediakan kerangka matematis yang tepat untuk memodelkan sistem kejadian diskrit seperti penjadwalan transportasi (Subiono, 2015). Sistem ini bekerja pada himpunan bilangan real yang diperluas dengan elemen negatif tak hingga $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dengan mengubah operasi aljabar biasa: operasi penjumlahan digantikan oleh operasi maksimum (dilambangkan dengan $\oplus$) dan operasi perkalian digantikan oleh operasi penjumlahan (dilambangkan dengan $\otimes$). Secara formal, untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$, didefinisikan:

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{dan} \quad a \otimes b = a + b.$$

Struktur ini secara alami mencerminkan dua prinsip kunci dalam penjadwalan, yaitu sinkronisasi dan akumulasi waktu (Subiono et al., 2018). Sinkronisasi dimodelkan oleh operasi $\oplus$, yang merepresentasikan ketergantungan antar kejadian, di mana suatu peristiwa hanya dapat dimulai setelah semua peristiwa pendahulunya selesai. Sementara itu, operasi $\otimes$ menggambarkan durasi atau jeda waktu yang diperlukan antara satu kejadian dengan kejadian berikutnya (Šfiligoj & Peperko, 2025). Dalam konteks penjadwalan Trans Jatim, seluruh jaringan rute dapat diformulasikan ke dalam persamaan linear matriks berbentuk:

$$\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k),$$

di mana $\mathbf{x}(k)$ adalah vektor yang mencatat waktu kejadian di setiap terminal pada siklus ke- k , dan A adalah matriks transisi yang elemen-elemennya a_{ij} menyimpan informasi waktu tempuh dari halte j ke halte i (atau $-\infty$ jika tidak ada rute langsung). Melalui analisis nilai eigen λ dan vektor eigen $\mathbf{v}$ dalam sistem ini, yang memenuhi $A \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}$, dapat diidentifikasi waktu siklus fundamental sistem (yang merepresentasikan interval keberangkatan), serta dihitung jadwal kondisi tunak yang optimal. (Šfiligoj & Peperko, 2025)

Dalam pemodelan penjadwalan berbasis aljabar max-plus, representasi sistem secara grafis memainkan peran penting sebagai landasan visual dan struktural (Subiono et al., 2018). Jaringan rute Trans Jatim direpresentasikan sebagai graf berarah berbobot (*directed weighted graph*) $G = (V, E, w)$, di mana himpunan simpul V merepresentasikan titik pemberhentian, himpunan sisi berarah E merepresentasikan rute perjalanan antar titik pemberhentian, dan fungsi bobot $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ mengasosiasikan setiap sisi dengan waktu tempuh antara dua simpul yang terhubung. Struktur graf rute Trans Jatim yang tidak saling terhubung kuat ini kemudian secara langsung memetakan ke dalam matriks transisi A berukuran $n \times n$ (dengan $n = |V|$) pada persamaan max-plus $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$, di mana elemen a_{ij} bernilai $w(e_{ji})$ jika terdapat sisi dari simpul j ke simpul i , dan bernilai ε (negatif tak hingga) jika tidak terdapat koneksi langsung. Dengan demikian, siklus dalam graf (*cycle*) berkorespondensi dengan urutan perjalanan berulang, dan bobot rata-rata siklus (*average cycle weight*) memiliki hubungan fundamental dengan nilai eigen λ sistem, yang menentukan waktu siklus terkritik penjadwalan.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, permasalahan utama dalam pengoperasian Bus Trans Jatim Koridor I terletak pada keterbatasan sistem penjadwalan dalam mengakomodasi jaringan rute, sehingga menyebabkan waktu tunggu yang tidak terprediksi. Kondisi ini mencerminkan adanya hambatan sinkronisasi pada infrastruktur transportasi. Oleh karena itu, penelitian ini secara spesifik akan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut mengenai optimalisasi waktu siklus menggunakan pendekatan aljabar max-plus pada struktur jaringan yang memiliki karakteristik matriks redusibel.

1. Bagaimana memodelkan jaringan rute dan ketergantungan waktu operasi Bus Trans Jatim Koridor I menggunakan representasi aljabar max-plus dalam bentuk persamaan linear $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$?
2. Bagaimana menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada model aljabar max-plus pada jaringan yang tidak terhubung kuat serta menerapkannya dalam penyusunan jadwal bus yang sinkron, serta bagaimana pengaruhnya terhadap kestabilan dan sinkronisasi sistem penjadwalan bus?

Dengan menjawab rumusan masalah di atas, penelitian ini diharapkan dapat memberikan solusi matematis yang terstruktur dan terukur untuk mengoptimalkan penjadwalan Bus Trans Jatim Koridor I, sekaligus mengevaluasi efektivitas pendekatan aljabar max-plus dalam konteks transportasi publik di Indonesia.

1.3. Batasan Masalah

Penelitian ini memiliki beberapa batasan untuk memfokuskan analisis dan memastikan kedalaman pembahasan.

1. Penelitian ini berfokus pada penjadwalan Bus Trans Jatim Koridor I (Sidoarjo–Surabaya–Gresik). Pemilihan koridor ini didasarkan pada tingginya minat dan mobilitas penumpang pada rute tersebut, yang berpotensi menyebabkan ketidakseimbangan antara permintaan layanan dan jadwal operasional. Oleh karena itu, diperlukan evaluasi dan penyesuaian jadwal guna meningkatkan efisiensi waktu layanan dan keteraturan sistem transportasi.
2. Model penjadwalan yang dibangun menggunakan pendekatan aljabar max-plus berasumsi bahwa waktu tempuh antar terminal bersifat deterministik (tetap) dalam kondisi normal, tanpa mempertimbangkan gangguan temporer seperti ke-

macetan ekstrem atau kecelakaan secara *real-time*.

3. Analisis difokuskan pada penjadwalan keberangkatan bus (*headway scheduling*) dan waktu siklus operasi, belum memasukkan faktor dinamis seperti fluktuasi permintaan penumpang antarwaktu secara detail.
4. Data yang digunakan merupakan data operasional ideal (*schedule-based*) dari pihak pengelola, yang nantinya dapat diverifikasi dengan data observasi lapangan terbatas.

Dengan batasan-batasan ini, penelitian diharapkan dapat memberikan solusi penjadwalan yang optimal dan terukur untuk koridor I, yang selanjutnya dapat menjadi model acuan untuk pengembangan koridor lainnya.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diidentifikasi, penelitian ini dilaksanakan dengan tujuan-tujuan berikut:

1. Memodelkan Jaringan Operasi Bus Trans Jatim Koridor I

Mengembangkan model matematis berbasis aljabar max-plus yang merepresentasikan ketergantungan waktu dan struktur rute Bus Trans Jatim Koridor I dalam bentuk persamaan linear $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$.

2. Menganalisis Karakteristik Sistem melalui Perhitungan Eigen Max-Plus

Menghitung nilai eigen (λ) dan vektor eigen ($\mathbf{v}$) dari matriks ketergantungan waktu tempuh menggunakan algoritma Power untuk jadwal kondisi tunak yang optimal di mana tidak semua halte saling terhubung.

Secara umum, penelitian ini bertujuan untuk memberikan solusi komputasional yang terstruktur dalam perbaikan penjadwalan Bus Trans Jatim, serta meng-

uji efektivitas penerapan aljabar max-plus sebagai alat analisis dan optimasi dalam konteks sistem transportasi publik Indonesia.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dan manfaat baik secara teoretis maupun praktis, sebagai berikut:

1. Bagi penulis dan pembaca

Menambah pengetahuan aplikasi aljabar max-plus dalam pemodelan sistem kejadian diskrit, khususnya pada konteks transportasi publik perkotaan di Indonesia, yang dapat menjadi referensi bagi penelitian serupa di masa depan.

2. Bagi instansi dan pengelola

Menyediakan rekomendasi penjadwalan yang terukur dan optimal untuk koridor I, yang diharapkan dapat mengurangi penolakan penumpang, meningkatkan kepuasan pengguna, serta mengoptimalkan utilisasi armada dan sumber daya operasional.

3. Bagi penumpang dan masyarakat

Meningkatkan kualitas pelayanan melalui penjadwalan yang lebih teratur dan prediktif, sehingga mengurangi waktu tunggu, meningkatkan kenyamanan, dan mendorong penggunaan transportasi umum yang lebih masif.

4. Bagi pemerintah dan *stakeholder* kebijakan

Memberikan dasar empiris dan metodologis dalam perencanaan dan evaluasi sistem transportasi publik, khususnya dalam hal penjadwalan, yang dapat diadopsi atau diadaptasi untuk koridor lain maupun angkutan umum di daerah lainnya.

Dengan demikian, hasil penelitian ini diharapkan tidak hanya memberikan

solusi langsung bagi permasalahan operasional Bus Trans Jatim, tetapi juga berkontribusi pada pengembangan keilmuan serta perbaikan tata kelola transportasi publik secara lebih luas.

1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan skripsi ini bersumber dari buku dan artikel.

1. Buku karya Baccelli et al. (1992) dengan judul "*Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*" membahas kerangka matematis untuk memodelkan sistem kejadian diskrit menggunakan aljabar max-plus. Pembahasan di dalam buku tersebut meliputi struktur graf berarah, komponen terhubung kuat, representasi matriks max-plus, serta konsep-konsep penting seperti *irreducibility*, siklus, dan nilai eigen max-plus. Buku ini menjadi rujukan utama dalam memahami teori dasar penjadwalan berbasis aljabar max-plus, terutama dalam menghubungkan struktur graf dengan sifat matriks yang membentuk dinamika sistem.
2. Artikel karya Subiono et al. (2018) dengan judul "*Generalized Public Transportation Scheduling Using Max-Plus Algebra*" membahas penerapan aljabar max-plus dalam penjadwalan transportasi publik yang bersifat periodik. Pembahasan artikel tersebut mencakup formulasi sistem kejadian diskrit, struktur graf serta representasi matriks max-plus, analisis nilai eigen max-plus, dan penentuan *cycle time*. Selain itu, artikel ini juga menyajikan penerapan model pada studi kasus penjadwalan transportasi publik. Oleh karena itu, artikel ini menjadi rujukan penting dalam memahami mekanisme penjadwalan dan sinkronisasi transportasi dengan pendekatan aljabar max-plus.

3. Artikel karya Sugiarto et al. (2020) dengan judul ***"Bus Schedule Modelling in Bandung, Indonesia using Max-Plus Algebra"*** yang membahas penerapan aljabar max-plus untuk memodelkan penjadwalan sistem bis kota daerah Bandung melalui representasi graf berarah dan matriks max-plus. Pembahasan artikel tersebut mencakup pembentukan model graf untuk sinkronisasi waktu, penggunaan operasi aljabar max-plus dalam menentukan periode sistem, serta analisis nilai eigen sebagai karakteristik waktu siklus. Artikel ini menjadi rujukan penting dalam memahami aplikasi aljabar max-plus pada penjadwalan transportasi publik.
4. Artikel karya Susilowati & Widayati (2024) dengan judul ***"Penjadwalan Kereta Api Daop 8 Surabaya Menggunakan Aljabar Max Plus"*** membahas optimisasi jadwal keberangkatan kereta api untuk meminimalisir keterlambatan (*delay*). Pembahasan dalam artikel tersebut mencakup pemodelan jaringan kereta api melalui graf berarah, formulasi sistem menggunakan persamaan linear aljabar max-plus $x(k) = A \otimes x(k - 1)$, serta analisis nilai eigen untuk menentukan periode keberangkatan yang stabil. Penelitian ini menyoroti karakteristik jaringan di Daop 8 Surabaya yang menghasilkan matriks *reducible* (tidak terhubung kuat), sehingga meskipun nilai eigen dapat ditemukan untuk menentukan ritme periode keberangkatan, vektor eigen tidak dapat ditentukan secara unik. Oleh karena itu, artikel ini menjadi rujukan penting dalam memahami keterkaitan antara struktur konektivitas jaringan yang kompleks dengan sifat-sifat matematis matriks dalam penjadwalan transportasi riil.

Beberapa artikel dan buku dijadikan rujukan untuk memperkuat konsep dasar dalam penelitian ini. Berikut disajikan tabel persamaan dan perbedaan antara penelitian-penelitian sebelumnya dengan penelitian yang dilakukan penulis.

Tabel 1.1 Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian

No	Judul	Penulis	Persamaan	Perbedaan
1	<i>Bus Schedule Modelling in Bandung, Indonesia using Max-Plus Algebra</i>	Iwan Sugiarto, Ferry Jaya Permana, A. Yosep	Menggunakan aljabar max-plus dan graf berarah untuk memodelkan penjadwalan bus	Membahas topologi graf yang tidak terhubung kuat
2	<i>Generalized Public Transportation Scheduling Using Max-Plus Algebra</i>	K. Aruna Sakthi, R. Rajeswari	Pemanfaatan aljabar max-plus untuk memodelkan hubungan waktu kedatangan dan keberangkatan dan menerapkan teori graf	Menerapkan model max-plus pada sistem jaringan Bus Trans Jatim, menggunakan data operasional seperti waktu tempuh, headway, serta struktur rute
3	<i>Penjadwalan Kereta Api Daop 8 Surabaya Menggunakan Aljabar Max Plus</i>	Susilowati dan Widayati	Pengaplikasian model aljabar max-plus dengan menghasilkan karakteristik matriks redusibel	Menerapkan pada rute bus Trans Jatim

1.7. Metode Penelitian

Adapun tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Mencari dan mempelajari artikel, skripsi, dan thesis terdahulu yang melakukan pengkajian maupun penelitian mengenai aplikasi aljabar max plus dalam sistem penjadwalan

2. Pengambilan data rute dan waktu perjalanan Bus Trans Jatim

Pada tahap ini, penulis melakukan pengambilan data meliputi jalur keberangkatan Bus Trans Jatim dan waktu keberangkatan serta kedatangan di tiap halte atau pemberhentiannya melalui aplikasi resminya TransJatim Cetar

3. Membuat graf dari rute bus

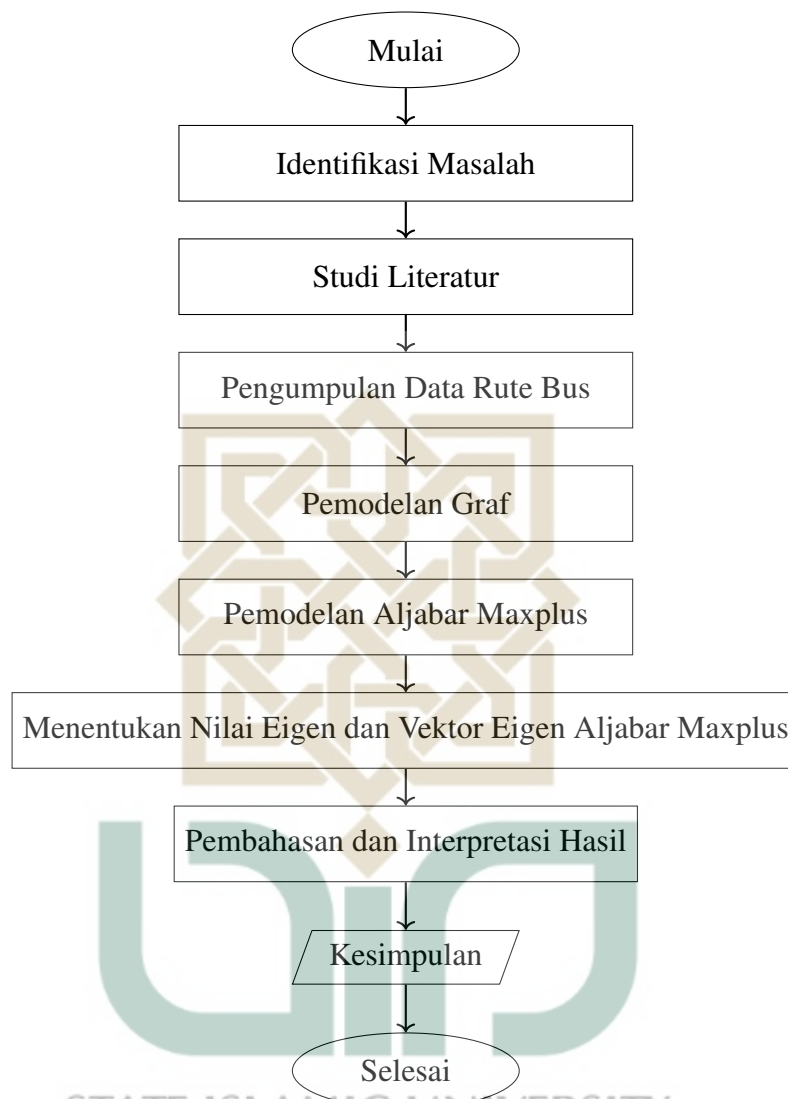
Tahap ini, penulis memodelkan graf berarah jalur yang dilalui Bus Trans Jatim dimana *vertex* menyatakan halte

4. Penjadwalan dengan aljabar max plus

Kemudian, dari model graf yang dibuat pada tahap sebelumnya dibentuknya matriks dan penjadwalan dengan aljabar max plus.

5. Menghitung nilai eigen dan vektor eigen dari matriks aljabar max plus. Perhitungan ini dilakukan dengan bantuan pemrograman *Scilab* versi 5.5.2

Penelitian menyajikan *flowchart* untuk menggambarkan langkah penelitian yang akan dilakukan, yaitu sebagai berikut:



Gambar 1.1 Flowchart Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi lima bab, yaitu sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini memberikan pembahasan mengenai latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas mengenai teori-teori yang melandasi penelitian ini. Adapun teori yang termuat adalah dasar dari semiring, aljabar max plus, graf berarah berbobot dan matriksnya, serta algoritma power.
- BAB 3** : Bab ini memberikan hasil dan penjelasan mengenai model graf berarah dan berbobot dan desain penjadwalan menggunakan aljabar max-plus.
- BAB 4** : Bab ini memberikan kesimpulan dari pembahasan penelitian dan hasil yang diperoleh pada bab sebelumnya, dan juga berisi saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada Bab III, dapat disimpulkan

1. Pemodelan jaringan rute dan ketergantungan waktu operasi Bus Trans Jatim Koridor I dilakukan dengan mengonversikan variabel waktu perjalanan serta waktu tunggu (*dwell time*) antarhalte ke dalam elemen matriks transisi A berukuran 140×140 , yang didekomposisi ke dalam submatriks A_1 hingga A_4 berukuran 35×35 . Melalui pendekatan tersebut, penelitian ini berhasil mengonstruksi sistem persamaan linear aljabar max-plus dalam bentuk $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$ yang dianalisis menggunakan algoritma *power* untuk menghasilkan nilai eigen sebagai representasi waktu siklus pelayanan minimum dan vektor eigen sebagai estimasi waktu keberangkatan awal yang optimal, sehingga mampu mensimulasikan jadwal operasi armada secara periodik, sekuensial, dan deterministik.
2. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa nilai eigen (λ) yang diperoleh adalah sebesar 11,6. Nilai ini merepresentasikan periode atau selang waktu keberangkatan antar armada bus pada jaringan tersebut. Selain itu, penelitian ini memberikan wawasan tambahan bahwa apabila matriks aljabar max-plus yang terbentuk bersifat *reducible*, maka hal tersebut akan mengakibatkan komponen pada vektor eigen memiliki nilai infinit (tak terhingga). Hal ini menunjukkan pentingnya struktur keterhubungan dalam jaringan untuk menjamin eksistensi vektor eigen

yang terbatas.

4.2. Saran

Berdasarkan keterbatasan dan hasil yang diperoleh dalam penelitian ini, saran yang dapat diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Melakukan modifikasi atau penyesuaian pada struktur jaringan agar matriks aljabar max-plus yang terbentuk bersifat *irreducible*. Hal ini krusial untuk menghindari munculnya nilai infinit pada komponen vektor eigen, sehingga seluruh titik keberangkatan memiliki jadwal yang pasti dan terbatas.
2. Melakukan pengkajian lebih mendalam mengenai hubungan antara topologi graf jaringan bus dengan nilai eigen sebesar 11,6 menit, guna menjadikannya acuan dalam optimasi waktu tunggu penumpang di setiap halte.
3. Mengembangkan penelitian secara lebih detail dengan memperluas cakupan koridor Bus Trans Jatim serta menambahkan variabel-variabel realistik lainnya, seperti waktu pengisian ulang bahan bakar (*refuelling*), waktu tunggu di lampu lalu lintas, dan hambatan tak terduga lainnya.
4. Mengupayakan pengadaan jalur khusus (*dedicated lane*) bagi Bus Trans Jatim agar penerapan penjadwalan menggunakan aljabar max-plus dapat berjalan lebih efektif, stabil, dan terjamin tanpa terganggu oleh volume kendaraan lain di jalur umum.

DAFTAR PUSTAKA

- Anggraeni, D. P., Renatasari, C., Pakpahan, P. A. R., & Wati, S. F. A. (2024). Analisis peningkatan jumlah transportasi kota surabaya menggunakan sistem dinamik. *KOLONI: Jurnal Multidisiplin Ilmu*, 3(2):237, ISSN: 2828-6863, <https://koloni.or.id/index.php/koloni/article/view/662>.
- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., & Quadrat, J.-P. (1992). *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Chichester.
- Butkovič, P. (2010). *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, London, DOI: 10.1007/978-1-84996-299-5.
- Gursoy, B. B. & Mason, O. (2011). Spectral properties of matrix polynomials in the max algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 435(7):1626–1636, DOI: 10.1016/j.laa.2010.01.014.
- Horn, R. A. & Johnson, C. R. (2012). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, ISBN: 978-0521839402.
- JDIH Kemenko Bidang Infrastruktur dan Pembangunan Kewilayahan (2022). Kawasan strategis nasional perkotaan gerbangkertosusila. <https://jdih.kemenkoinfra.go.id/kawasan-strategis-nasional-perkotaan-gerbangkertosusila>. Infografis; mengacu pada Peraturan Presiden Nomor 66 Tahun 2022 tentang Rencana Tata Ruang Kawasan Strategis Nasional Kawasan Perkotaan Gresik, Bangkalan, Mojokerto, Surabaya, Sidoarjo, dan Lamongan.

- Musthofa & Binatari, N. (2013). Sifat-sifat nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maxplus. *Jurnal Sains Dasar*, 2(1):25–31.
- Olsder, G. J. & van der Woude, J. (2005). *Max Plus at Work*. Princeton University Press, United States.
- Rudhito, A. (2003). Sistem linear max-plus waktu-invariant. Tesis, Program Pasca-sarjana Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
- Subiono (2015). *Aljabar Max-Plus dan Terapannya*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Subiono, Fahim, K., & Adzkiya, D. (2018). Generalized public transportation scheduling using max-plus algebra. *Kybernetika*, 54(2):243–267.
- Sugiarto, I., Permana, F. J., & Yosep, A. (2020). Bus schedule modelling in Bandung, Indonesia, using max-plus algebra. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, volume 830, page 022004. IOP Publishing, DOI: 10.1088/1757-899X/830/2/022004, <https://doi.org/10.1088/1757-899X/830/2/022004>.
- Susilowati, E. & Widayati, R. (2024). Penjadwalan kereta api daop 8 su-rabaya menggunakan aljabar max plus. *SAINTIFIK: Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya*, 10(1):67–74, ISSN: 2622-8904, DOI: 10.31605/saintifik.v10i1.482, <https://jurnal.unsulbar.ac.id/index.php/saintifik/article/view/482>.
- West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2nd edition, ISBN: 9780130144003.

Šfiligoj, T. & Peperko, A. (2025). A max-plus algebraic model of bus bunching and control strategies. *Transportation Research Procedia*, 83:88–94, DOI: 10.1016/j.trpro.2025.02.013.

