

SKRIPSI

**POLA STRUKTUR DARI GRAF PANGKAT ATAS GRUP
SIMETRI DAN ALTERNATING**



JEISINTA HANA HANIFAH

22106010054

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2026

POLA STRUKTUR DARI GRAF PANGKAT ATAS GRUP SIMETRI DAN ALTERNATING

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



diajukan oleh

JEISINTA HANA HANIFAH

22106010054

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2026



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Jeisinta Hana Hanifah

NIM : 22106010054

Judul Skripsi : Pola Struktur dari Graf Pangkat atas Grup Simetri dan Grup Alternating

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Yogyakarta, 18 Mei 2026

Pembimbing,

Arif Munandar, M.Sc.

NIP. 19920721 201903 1 013



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1179/Un.02/DST/PP.00.9/06/2026

Tugas Akhir dengan judul : Pola Struktur dari Graf Pangkat atas Grup Simetri dan Alternating

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : JEISINTA HANA HANIFAH
Nomor Induk Mahasiswa : 22106010054
Telah diujikan pada : Jumat, 22 Mei 2026
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang
Arif Munandar, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 6a1e7add6455



Penguji I
Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 6a1ff310e462d



Penguji II
Prof. Dr. Muhammad Wakhid Musthofa,
S.Si., M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6a10fcee73e89



Yogyakarta, 22 Mei 2026
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6a213253f1a27

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Jeisinta Hana Hanifah

NIM : 22106010054

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 19 Mei 2026



Jeisinta Hana Hanifah

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



Skripsi ini Penulis persembahkan untuk diri sendiri, keluarga, dan almamater

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga

HALAMAN MOTTO



"Hiduplah seperti orang hidup."

— Jeisinta Hana Hanifah

"Bermimpilah setinggi langit. Jika engkau jatuh, engkau akan jatuh di antara bintang-bintang."

— Sukarno

"Luka adalah tempat di mana cahaya memasuki dirimu."

— Jalaluddin Rumi

"Bermimpilah setinggi Scopus. Jika kamu gagal, kamu akan jatuh di antara Sinta-Sinta."

— Robit Ma'rufi Sabila

"Belajar itu harus, pintar itu bonus."

— Humairoh Wahidatul Izzah

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur kehadiran Allah Swt. yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada Penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Pola Struktur dari Graf Pangkat atas Grup Simetri dan Grup Alternating". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati, Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Allah Swt. yang senantiasa memberikan kesehatan, kekuatan, dan kemudahan kepada Penulis.
2. Orang Tua Tercinta, yang tiada hentinya memberikan kasih sayang, doa yang tulus, dukungan moril maupun materil, serta ridha yang menjadi kekuatan terbesar bagi Penulis. Masih banyak rasa syukur yang tidak bisa Penulis sampaikan.
3. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
5. Noor Saif Muhammad Mussafi, S.Si., M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan kepada Penulis selama

menempuh pendidikan.

6. Arif Munandar, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, pikiran, kesabaran, dan arahan untuk membimbing Penulis dalam penyusunan skripsi ini. Semoga, di kemudian hari, Penulis bisa menemukan Pak Arif yang lain di mana pun berpijak.
7. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.
8. Sahabat Pentagon Rajin Tahajjud yang telah memberikan dukungan dan kebersamaan kepada Penulis sejak awal masa perkuliahan hingga tahap akhir penyusunan skripsi ini. Terima kasih, semoga kita selalu diberikan kemudahan.
9. Teman-teman Matematika angkatan 2022 yang telah menemani, mendukung, memotivasi, membantu, dan memberi semangat selama menjalani masa perkuliahan.
10. Semua pihak yang tidak bisa Penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 20 Mei 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMBANG	xiv
INTISARI	xv
ABSTRACT	xvi
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	3
1.3. Rumusan Masalah	3
1.4. Tujuan Penelitian	4
1.5. Manfaat Penelitian	4
1.6. Tinjauan Pustaka	5
1.7. Metode Penelitian	6
1.8. Sistematika Penulisan	8
II DASAR TEORI	9

2.1. Grup	9
2.1.1. Grup Simetri	19
2.1.2. Grup Alternating	27
2.2. Teori Bilangan	32
2.3. Graf	39
III Pembahasan	48
3.1. Pola Struktur Graf Pangkat atas Grup Simetri S_n	48
3.1.1. Konsep Dasar Graf Pangkat atas Grup Simetri S_n	48
3.1.2. Konstruksi Graf Pangkat atas Grup Simetri S_n	52
3.2. Analisis Konektivitas Graf Pangkat atas Grup Simetri S_n	78
3.2.1. Teorema Hasil dari Konektivitas Graf Pangkat atas Grup Simetri	78
3.2.2. <i>Clique Number</i> pada Graf Pangkat atas Grup Simetri	85
3.3. Pola Struktur Graf Pangkat atas Grup Alternating A_n	92
3.4. Analisis Konektivitas Graf Pangkat atas Grup Alternating A_n	101
3.4.1. Teorema Hasil dari Konektivitas Graf Pangkat atas Grup Alternating	101
3.4.2. <i>Clique Number</i> pada Graf Pangkat atas Grup Alternating	108
IV PENUTUP	111
4.1. Kesimpulan	111
4.2. Saran	112
DAFTAR PUSTAKA	112
Curriculum Vitae	117

DAFTAR TABEL

1.1	Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian	6
2.1	Tabel Cayley Grup D_4	11
3.1	Tabel Keterhubungan $\mathcal{P}(S_3)$	49
3.2	Tabel Partisi Grup Simetri S_6	50
3.3	Tabel Keterhubungan Contoh Elemen pada $\mathcal{P}(S_6)$	51
3.4	Tabel Keterhubungan $\mathcal{P}(S_4)$	58
3.5	Tabel Partisi S_7	63
3.6	Tabel Keterhubungan untuk $\langle(1234567)\rangle$	63
3.7	Contoh Hasil Perpangkatan dari $\langle(1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5)\rangle$	64
3.8	Contoh Hasil Perpangkatan dari Tipe <i>Cycle</i> $(a_1a_2 \cdots a_5)(a_6a_7)$. . .	66
3.9	Contoh Hasil Perpangkatan dari $\langle(12345)\rangle$	67
3.10	Contoh Hasil Perpangkatan dari Tipe <i>Cycle</i> $(a_1a_2a_3a_4)(a_5a_6a_7)$. .	69
3.11	Tabel Tipe <i>Cycle</i> dan Orde Elemen pada Grup Simetri S_7	76
3.12	<i>Clique Number</i> pada Graf Pangkat atas Grup Simetri S_n	91
3.13	Tabel Keterhubungan $\mathcal{P}(A_4)$	93
3.14	Tabel Partisi Grup Alternating A_8	95
3.15	Contoh Hasil Perpangkatan dari Tipe <i>Cycle</i> $(a_1a_2 \dots a_5)(a_6a_7a_8)$. .	96
3.16	Kelompok Tipe <i>Cycle</i> dan Orde Elemen pada $\mathcal{P}(A_8)$	99
3.17	<i>Clique Number</i> pada Graf Pangkat atas Grup Alternating A_n	110

DAFTAR GAMBAR

1.1	Skema Metode Penelitian	7
2.1	Graf G	40
2.2	H_1	40
2.3	H_2	41
2.4	Graf Lengkap K_3 dan K_4	41
2.5	Graf G	42
2.6	Graf R	43
2.7	Contoh Graf G Terhubung dan Graf H Tidak Terhubung	43
2.8	Dua Graf yang Isomorfik $G \cong H$	44
2.9	Representasi Graf K dan Graf L	45
3.1	Graf Pangkat atas Grup Simetri S_3 ($\mathcal{P}(S_3)$)	50
3.2	Subgraf Lengkap K_3 dari $\mathcal{P}(S_3)$	50
3.3	Subgraf dari $\mathcal{P}(S_6)$	51
3.4	Sketsa Subgraf menurut Elemen Pusat	61
3.5	Subgraf Lengkap K_7 dari $\langle(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)\rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	64
3.6	Subgraf dari $\langle(1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5)\rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	65
3.7	Subgraf dari $\langle(a_1 a_2 \dots a_6)\rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	65
3.8	Subgraf R_1	66
3.9	Subgraf dari $\langle(a_1 a_2 \dots a_5)(a_6 a_7)\rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	67
3.10	Subgraf dari $\langle(a_1 a_2 \dots a_5)\rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	68
3.11	Subgraf dari $\langle(a_1 a_2 a_3 a_4)(a_5 a_6 a_7)\rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	70
3.12	Subgraf dari $\langle(a_1 a_2 a_3 a_4)(a_5 a_6)\rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	71

3.13 Subgraf dari $\langle (a_1 a_2 a_3 a_4) \rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	72
3.14 Subgraf dari $\langle (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6) \rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	72
3.15 Subgraf dari $\langle (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5)(a_6 a_7) \rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	73
3.16 Subgraf dari $\langle (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5) \rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	74
3.17 Subgraf dari $\langle (a_1 a_2 a_3) \rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	75
3.18 Subgraf Elemen Berorde Dua pada $\mathcal{P}(S_7)$	75
3.19 Subgraf dari Kelompok 4 pada Graf Pangkat $\mathcal{P}(S_7)$	77
3.20 Graf $\mathcal{P}(S_3) - S$ dari $\mathcal{P}(S_3)$	83
3.21 Subgraf K_9 dari $\langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7) \rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	86
3.22 Subgraf K_9 dari $\langle (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7) \rangle$ pada $\mathcal{P}(S_7)$	87
3.23 Subgraf K_{13} dari $\langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8) \rangle$ pada $\mathcal{P}(S_8)$	88
3.24 Graf Pangkat dari Grup Alternating A_4	93
3.25 Graf Pangkat dari Grup Alternating $\mathcal{P}(A_5)$	94
3.26 Subgraf dari $\langle (a_1 a_2 \dots a_6)(a_7 a_8) \rangle$ dari $\mathcal{P}(A_8)$	95
3.27 Subgraf R_1	96
3.28 Subgraf dari $\langle (a_1 a_2 \dots a_5)(a_6 a_7 a_8) \rangle$ pada $\mathcal{P}(A_8)$	97
3.29 Subgraf dari $\langle (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5)(a_6 a_7) \rangle$ pada $\mathcal{P}(A_8)$	98
3.30 Subgraf dari Elemen Berorde Tiga pada $\mathcal{P}(A_8)$	98
3.31 Subgraf Elemen Berorde Dua pada $\mathcal{P}(A_8)$	99
3.32 Subgraf dari Kelompok Dua pada $\mathcal{P}(A_8)$	100
3.33 Subgraf dari Kelompok Tiga pada $\mathcal{P}(A_8)$	101
3.34 Graf $\mathcal{P}(A_4) - S$	106

DAFTAR LAMBANG

$x \in A$	: x anggota A
$A \subseteq X$	: A himpunan bagian (<i>subset</i>) atau sama dengan X
$\mathbb{N}$	: himpunan semua asli
$\mathbb{Z}$	: himpunan semua bilangan bulat
■	: akhir suatu bukti
□	: akhir suatu contoh
S_n	: grup simetri S_n
A_n	: grup alternating A_n
$\mathcal{P}(S_n)$	: graf pangkat atas grup simetri S_n
$\mathcal{P}(A_n)$	: graf pangkat atas grup simetri A_n
$Z(G)$	: <i>centre</i> dari G
$C(a)$	: <i>centralizer</i> dari a
$Cl(a)$	: kelas konjugasi dari a
$\bigcap_{i \in I} H_i$	: irisan berindeks dari himpunan H_i dengan $i \in I$
$\bigcup_{B \in \mathcal{P}} B$	: gabungan himpunan B untuk setiap $B \in \mathcal{P}$
$[G : H]$	: indeks subgrup H dalam grup G
$\text{diam}(\mathcal{P}(S_n))$	: diameter dari graf pangkat atas grup simetri S_n
$\text{rad}(\mathcal{P}(S_n))$	: radius dari graf pangkat atas grup simetri S_n
$\omega(\mathcal{P}(S_n))$	: <i>clique number</i> dari graf pangkat atas grup simetri S_n

INTISARI

POLA STRUKTUR DARI GRAF PANGKAT ATAS GRUP SIMETRI DAN ALTERNATING

Oleh

Jeisinta Hana Hanifah

22106010054

Studi graf pangkat atas grup simetri dan grup alternating dengan tidak melibatkan identitas grup sebagai verteks telah berhasil dikaji. Akan tetapi, penelitian spesifik yang menyertakan identitas masih sangat terbatas ditemukan dalam literatur. Kemudian, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis struktur serta konektivitas dari graf pangkat atas grup simetri dan grup alternating dengan melibatkan identitas. Penelitian dimulai dengan metode studi literatur digunakan untuk mengintegrasikan antara konsep teori grup, teori graf, dan teori bilangan yang kemudian diperoleh langkah konstruksi $\mathcal{P}(S_n)$ terstruktur sehingga didapat pola strukturnya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa subgraf lengkap K_k diperoleh dari subgrup siklik yang dibangun oleh k -cycle untuk setiap $k < n$ dengan $k = p^m$ dan n bukan pangkat prima serta untuk setiap $k \leq n$ dengan $k = p^m$ dan n pangkat prima pada $\mathcal{P}(S_n)$, sedangkan subgraf lengkap K_k diperoleh dari subgrup siklik yang dibangun oleh k -cycle untuk setiap $k < n$ dengan $k = p^m$ ganjil dan n genap serta untuk setiap $k \leq n$ dengan $k = p^m$ ganjil dan n pangkat prima pada $\mathcal{P}(A_n)$. Lebih lanjut, $\mathcal{P}(S_n)$ terhubung untuk $n \geq 3$ dengan $\text{diam}(\mathcal{P}(S_n)) = 2$ untuk $n \geq 3$ dan $\text{rad}(\mathcal{P}(S_n)) = 1$ untuk $n \geq 2$, sedangkan $\mathcal{P}(A_n)$ terhubung untuk $n \geq 3$ dengan $\text{diam}(\mathcal{P}(A_n)) = 2$ untuk $n \geq 4$ dan $\text{rad}(\mathcal{P}(A_n)) = 1$ untuk $n \geq 3$. Kedua graf tersebut bukan merupakan graf Euler untuk $n \geq 4$ serta bukan graf Hamilton untuk $n \geq 5$ serta $n = p$. Selain itu, *clique number* dianalisis untuk $1 \leq n \leq 20$.

Kata kunci : *clique number*, graf pangkat, grup alternating, grup simetri, konektivitas.

ABSTRACT

STRUCTURAL PATTERNS OF POWER GRAPHS OF SYMMETRIC AND ALTERNATING GROUPS

By

Jeisinta Hana Hanifah

22106010054

Studies on the power graphs of symmetric and alternating groups that exclude the group identity as a vertex have been widely investigated. However, specific research that includes the identity element remains heavily limited in the literature. This study aims to analyze the structure and connectivity of the power graphs of symmetric and alternating groups by incorporating the identity element. The research begins with a literature review to integrate the concepts of group theory, graph theory, and number theory, from which a structured construction method for $\mathcal{P}(S_n)$ is established to determine its structural patterns. The results demonstrate that the complete subgraph K_k is obtained from the cyclic subgroup generated by a k -cycle for every $k < n$ with $k = p^m$ where n is not a prime power, as well as for every $k \leq n$ with $k = p^m$ where n is a prime power in $\mathcal{P}(S_n)$. Meanwhile, in $\mathcal{P}(A_n)$, the complete subgraph K_k is obtained from the cyclic subgroup generated by a k -cycle for every $k < n$ with an odd $k = p^m$ and an even n , as well as for every $k \leq n$ with an odd $k = p^m$ where n is a prime power. Furthermore, $\mathcal{P}(S_n)$ is connected for $n \geq 3$ with $\text{diam}(\mathcal{P}(S_n)) = 2$ for $n \geq 3$ and $\text{rad}(\mathcal{P}(S_n)) = 1$ for $n \geq 2$, whereas $\mathcal{P}(A_n)$ is connected for $n \geq 3$ with $\text{diam}(\mathcal{P}(A_n)) = 2$ for $n \geq 4$ and $\text{rad}(\mathcal{P}(A_n)) = 1$ for $n \geq 3$. Both graphs are non-Eulerian for $n \geq 4$ and non-Hamiltonian for $n \geq 5$ and $n = p$. Additionally, the clique number is analyzed for $1 \leq n \leq 20$.

Keywords: alternating group, clique number, connectivity, power graph, symmetric group.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Teori graf berawal dari permasalahan sederhana yang pada mulanya dipandang sebagai teka-teki. Seiring perkembangannya, permasalahan tersebut justru memotivasi lahirnya cabang matematika baru yang kaya akan teoretis. Tonggak awal teori graf adalah karya Leonhard Euler pada tahun 1736 yang memecahkan masalah tujuh jembatan di Königsberg. Dalam permasalahan tersebut, empat daratan direpresentasikan sebagai verteks dan tujuh jembatan direpresentasikan sebagai edge. Melalui karyanya, Euler juga memperkenalkan pendekatan umum dengan tipe serupa yang menjadi dasar perkembangan teori graf selanjutnya (Biggs et al., 1986).

Di sisi lain, teori grup merupakan salah satu cabang terpenting dalam aljabar abstrak yang mempelajari struktur aljabar berupa grup. Berdasarkan kajian historis yang disampaikan oleh Kleiner, 2007, perkembangan teori grup berakar dari empat sumber utama, yaitu aljabar klasik, teori bilangan, geometri, dan analisis. Pada aljabar klasik, teori grup muncul melalui kajian grup permutasi yang berkaitan dengan penyelesaian persamaan aljabar. Karya Lagrange pada tahun 1770 menjadi titik awal penting yang kemudian dikembangkan lebih lanjut oleh Ruffini, Abel, dan mencapai kemajuan konseptual fundamental melalui Galois. Kontribusi penting lainnya datang dari Cauchy yang memperkenalkan teori grup permutasi sebagai subjek mandiri serta mengembangkan terminologi, notasi dasar, dan hasil-hasil

teori permutasi. Selanjutnya, Jordan memperluas kajian ini dengan memperkenalkan konsep-konsep penting seperti isomorfisme dan homomorfisme. Di samping itu, grup abelian berkembang melalui kajian teori bilangan yang bersama dengan teori grup permutasi membentuk dasar bagi teori grup hingga. Sementara itu, grup transformasi dan grup tak hingga berkembang sebagai spesialisasi teori yang bersumber dari geometri dan analisis. Pada akhirnya, teori grup abstrak berkembang ke dalam beberapa cabang utama, antara lain teori grup hingga, teori grup kombinatorik, teori grup abelian tak hingga, dan teori grup topologi.

Seiring dengan perkembangan teori graf dan teori grup, studi tentang representasi graf pada struktur aljabar, khususnya semigrup atau grup, menjadi topik menarik pada beberapa dekade terakhir. Salah satu objek kajian yang berkembang dari penelitian tersebut adalah graf pangkat. Graf pangkat berarah diperkenalkan oleh Kelarev & Quinn, 2000. Sementara itu, graf pangkat atas semigrup pertama kali diperkenalkan oleh Kelarev et al., 2001 dan pada tahun berikutnya Kelarev & Quinn, 2002 juga melakukan penelitian. Penelitian tentang graf pangkat pada graf berarah memotivasi Chakrabarty et al., 2009 untuk meneliti graf pangkat tak berarah atas semigrup. Selanjutnya, graf pangkat tak berarah menjadi fokus utama pada penelitian lain di antaranya Abawajy et al., 2013, Cameron, 2010, Cameron & Ghosh, 2011, Curtin & Pourgholi, 2014, McKemmie, 2014, dan Ma et al., 2019 (Kumar et al., 2021).

Secara khusus, Pourghobadi & Jafari, 2018 mengkaji graf pangkat atas grup simetri dengan menghilangkan elemen identitas atau yang dikenal sebagai *proper power graph*. Kajian tersebut mencakup batas diameter dan beberapa *path* terpendek. Selanjutnya, penelitian terbaru yang menjadi rujukan utama dalam penulisan ini adalah kajian graf pangkat atas grup simetri S_n untuk $3 \leq n \leq 6$ dan $n \in \mathbb{N}$

tanpa menghilangkan elemen identitas yang dibahas oleh Maris et al., 2025. Kajian tersebut mencakup pembahasan mengenai struktur graf, subgraf lengkap yang terbentuk dari subgrup siklik dengan orde pangkat prima, dan sifat keterhubungan.

Penelitian ini melanjutkan kajian Maris et al., 2025 dengan menentukan subgraf lengkap yang terbentuk dari subgrup siklik berorde pangkat prima pada graf pangkat atas grup simetri S_n dan grup alternating A_n untuk $n \in \mathbb{N}$. Selain itu, penelitian ini juga mengkaji karakteristik konektivitas graf yang meliputi diameter, radius, serta sifat graf Euler untuk $n \geq 4$ dan graf Hamilton untuk $n = p$. Selanjutnya, ditentukan pula *clique number* pada graf pangkat atas grup simetri S_n dan graf pangkat atas grup alternating A_n untuk $1 \leq n \leq 20$ dengan $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Batasan Masalah

Penelitian ini difokuskan pada analisis struktur graf pangkat atas grup simetri S_n dan graf pangkat atas grup alternating A_n . Ruang lingkup pembahasan mencakup konsep dasar dan pola struktur umum serta karakteristik subgraf lengkap dari subgrup siklik yang dibangun oleh elemen k -cycle berorde $k = p^m$. Analisis sifat terhubung, diameter, radius, graf Euler, dan graf Hamilton untuk $k = p$. Adapun penentuan *clique number* pada graf pangkat atas grup simetri S_n dan graf pangkat atas grup alternating A_n , dibatasi oleh $1 \leq n \leq 20$ dengan $n \in \mathbb{N}$.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan sebelumnya, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana pola struktur graf yang terbentuk pada graf pangkat atas grup simetri S_n ?

2. Bagaimana analisis konektivitas dari graf pangkat atas grup simetri S_n ?
3. Bagaimana pola struktur graf yang terbentuk pada graf pangkat atas grup alternating A_n ?
4. Bagaimana analisis konektivitas dari graf pangkat atas grup alternating A_n ?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan pola struktur graf pangkat yang terbentuk pada graf pangkat atas grup simetri S_n .
2. Menganalisis konektivitas dari graf pangkat atas grup simetri S_n .
3. Menentukan pola struktur graf pangkat yang terbentuk pada graf pangkat atas grup alternating A_n .
4. Menganalisis konektivitas dari graf pangkat atas grup alternating A_n .

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan mengenai pola struktur graf yang terbentuk pada graf pangkat atas grup simetri S_n .
2. Menambah pemahaman mengenai konektivitas graf pangkat atas grup simetri S_n .
3. Menambah pengetahuan mengenai pola struktur graf yang terbentuk pada graf pangkat atas grup alternating A_n .

4. Menambah pemahaman mengenai konektivitas graf pangkat atas grup alternating A_n .

1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai landasan teori dalam penulisan skripsi ini, Penulis menggunakan beberapa sumber pustaka yang berasal dari buku dan artikel ilmiah yang berkaitan dengan teori graf, teori grup, serta kajian mengenai graf pangkat.

1. Munandar, 2022 dalam bukunya yang berjudul *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf* membahas konsep-konsep dasar matematika diskrit dan teori graf seperti definisi graf, keterhubungan, serta graf Euler dan graf Hamilton. Buku ini digunakan sebagai rujukan dalam memahami konsep dasar teori graf yang digunakan dalam penelitian ini.
2. Lee, 2018 dalam buku *Abstract Algebra: An Introductory Course* membahas konsep dasar aljabar abstrak, khususnya teori grup, meliputi definisi grup, definisi subgrup, serta pembahasan mengenai grup permutasi. Buku ini digunakan sebagai rujukan dalam memahami struktur grup yang berkaitan dengan grup simetri dan grup alternating.
3. Rosen, 2011 dalam buku *Elementary Number Theory and Its Applications* membahas konsep-konsep dasar teori bilangan seperti prima, faktor persekutuan, dan fungsi phi Euler. Konsep-konsep tersebut digunakan sebagai referensi pendukung dalam memahami *adjacency* setiap elemen grup permutasi.
4. Pourghobadi & Jafari, 2018 dalam artikelnya berjudul *The Diameter of Power Graphs of Symmetric Groups* membahas mengenai beberapa *path* terpendek dan batas diameter.

5. Maris et al., 2025 dalam artikelnya yang berjudul *The Structural Properties of Power Graph of Symmetric Groups* membahas sifat-sifat struktural dari graf pangkat atas grup simetri S_n untuk $3 \leq n \leq 6$ dan $n \in \mathbb{N}$, khususnya mengenai subgraf lengkap dan keterhubungan graf. Artikel ini menjadi referensi dalam memahami struktur graf pangkat atas grup simetri S_n .

Tabel 1.1 Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian

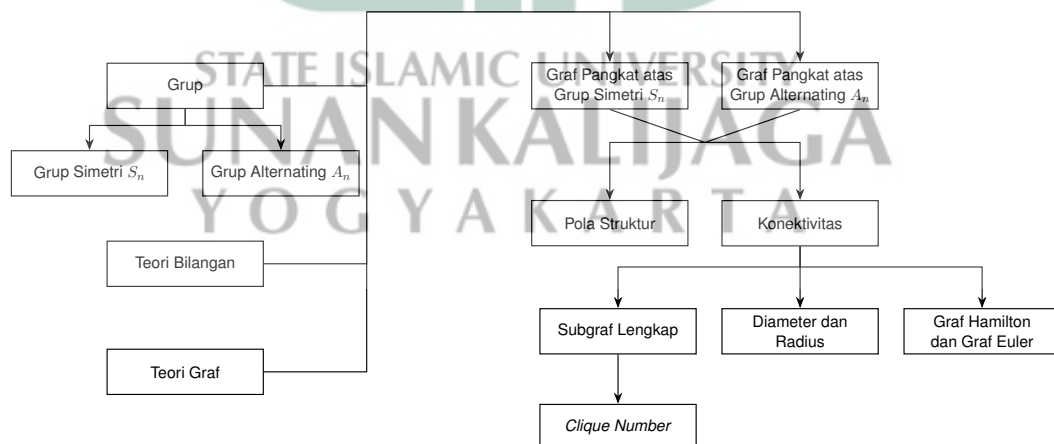
Judul	Penulis	Persamaan	Perbedaan
<i>The Structural Properties of The Power Graph of Symmetric Groups</i>	Ika Metiza Maris, Rawdah Adawiyah Tarmizi, Nor Hafizah Md Husin	Membahas tentang sifat-sifat struktural yang meliputi subgraf lengkap K_n dari subgrup siklik yang dibangun oleh orde pangkat prima dan sifat terhubung pada graf pangkat atas grup simetri S_n untuk $n = 3, 4, 5$, dan 6 .	Membahas tentang pola struktur graf dan subgraf, subgraf lengkap K_n dari subgrup siklik yang dibangun oleh orde pangkat prima, diameter, radius, <i>clique number</i> , serta sifat Euler dan Hamilton pada graf pangkat atas grup simetri S_n dan grup alternating A_n .

1.7. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi dan artikel-artikel terkait topik penelitian yaitu; konsep dasar, keterhubungan, parameter metrik berupa radius dan diameter, sifat graf Euler dan graf Hamilton, dan subgraf lengkap pada graf pangkat atas grup simetri S_n

dan graf pangkat atas graf alternating A_n . Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan sebagai berikut.

1. Membahas konsep dasar dari grup, teori bilangan, dan graf.
2. Membahas konsep dasar dan pola struktur dari graf pangkat atas grup simetri S_n .
3. Membahas tentang konektivitas graf pangkat atas grup simetri S_n yang meliputi subgraf lengkap, keterhubungan, diameter, radius, eksistensi graf Euler dan graf Hamilton, serta *clique number*.
4. Membahas konsep dasar dan pola struktur dari graf pangkat atas grup alternating A_n .
5. Membahas tentang konektivitas graf pangkat atas grup alternating A_n yang meliputi subgraf lengkap, keterhubungan, diameter, radius, eksistensi graf Euler dan graf Hamilton, serta *clique number*.



Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan penelitian ini terbagi menjadi empat bab sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas tentang dasar-dasar dari teori grup simetri S_n dan grup alternating A_n , teori bilangan, serta teori graf.
- BAB 3** : Bab ini membahas tentang konsep dasar, keterhubungan, dan *clique number* dari graf pangkat atas grup simetri S_n dan graf pangkat atas grup alternating A_n .
- BAB 4** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

PENUTUP

Bab penutup ini akan diberikan kesimpulan dan saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Struktur graf pangkat atas grup simetri S_n ditentukan oleh relasi perpangkatannya. Kompleksitas visual dan *adjacency* graf meningkat seiring bertambahnya nilai n . Pembentukan $\mathcal{P}(S_n)$ secara menyeluruh dikonstruksi melalui identifikasi hasil pangkat setiap elemen, tabel keterhubungan, serta penggabungan subgraf-subgraf.
2. Analisis konektivitas menunjukkan bahwa $\mathcal{P}(S_n)$ memuat subgraf lengkap dari subgrup siklik yang dibangun oleh k - *cycle* berorde p^m . Untuk $n \geq 3$, $\mathcal{P}(S_n)$ merupakan graf terhubung sehingga memiliki nilai diameter dan radius yang terdefinisi. Kemudian, $\mathcal{P}(S_n)$ bukan merupakan graf Euler untuk $n > 3$ dan bukan graf Hamilton untuk $n = p \geq 5$. Selain itu, *clique number* dari $\mathcal{P}(S_n)$ untuk $1 \leq n \leq 20$ telah diidentifikasi.
3. Pola struktur dari graf pangkat atas grup alternating A_n memiliki karakteristik pembentukan yang serupa dengan grup simetrinya. Namun, secara spesifik

$\mathcal{P}(A_n)$ dikonstruksi melalui pemetaan relasi pangkat terbatas pada himpunan permutasi genap. Hal ini menghasilkan keterhubungan subgraf yang lebih khusus dengan tingkat kompleksitas yang tetap berbanding lurus dengan penambahan nilai n .

4. Analisis terhadap sifat-sifat graf menunjukkan bahwa $\mathcal{P}(A_n)$ merupakan graf terhubung pada $n > 4$ yang berimplikasi pada eksistensi nilai eksentrisitas graf sehingga dapat ditentukan nilai dari radius dan diameter. Secara struktural, graf ini dipastikan tidak memiliki *circuit* Euler untuk $n \geq 4$ dan tidak memenuhi syarat graf Hamilton pada kondisi $n = p \geq 5$. Selain itu, *clique number* dari $\mathcal{P}(S_n)$ juga telah diidentifikasi untuk $1 \leq n \leq 20$.

4.2. Saran

Saran yang akan Penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. Penelitian ini dibatasi pada analisis elemen tipe k -cycle dan transposisi untuk menentukan jumlah permutasi yang terbentuk. Peneliti selanjutnya diharapkan dapat mengkaji jumlah permutasi dari dekomposisi *cycle* disjoint secara umum.
2. Penelitian ini dibatasi oleh analisis graf Hamilton pada $\mathcal{P}(S_n)$ dan $\mathcal{P}(A_n)$ untuk $n = p$. Penelitian selanjutnya disarankan untuk menganalisis untuk n sebarang.
3. Penelitian ini hanya dibatasi pada analisis *clique number* dari graf pangkat atas grup simetri S_n dan grup alternating A_n untuk $1 \leq n \leq 20$. Selanjutnya, disarankan untuk membentuk rumus umum *clique number* untuk sebarang n .

DAFTAR PUSTAKA

- Abawajy, J., Kelarev, A., & Chowdhury, M. (2013). Power graphs: a survey. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA)*, 1(2):125–147.
- Biggs, N., Lloyd, E. K., & Wilson, R. J. (1986). *Graph Theory, 1736-1936*. Oxford University Press.
- Burton, D. M. (2011). *Elementary Number Theory*. McGraw-Hill, New York, 7th edition, ISBN: 978-0-07-338314-9.
- Cameron, P. J. (2010). The power graph of a finite group, ii. *Preprint*.
- Cameron, P. J. & Ghosh, S. (2011). The power graph of a finite group. *Discrete Mathematics*, 311(13):1220–1222.
- Chakrabarty, I., Ghosh, S., & Sen, M. (2009). Undirected power graphs of semi-groups. In *Semigroup forum*, volume 78, pages 410–426.
- Curtin, B. & Pourgholi, G. R. (2014). Edge-maximality of power graphs of finite cyclic groups. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 40(2):313–330.
- Gray, J. (2018). *A History of Abstract Algebra: From Algebraic Equations to Modern Algebra*. Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland, 1st edition, ISBN: 978-3-319-94773-8, <https://doi.org/10.1007/978-3-319-94775-2>.
- Griffin, C. (2011–2021). Graph theory: Penn state math 485 lecture notes. Pennsylvania State University. Version 2.0. With contributions by Elena Kosygina and Suraj Shekhar.

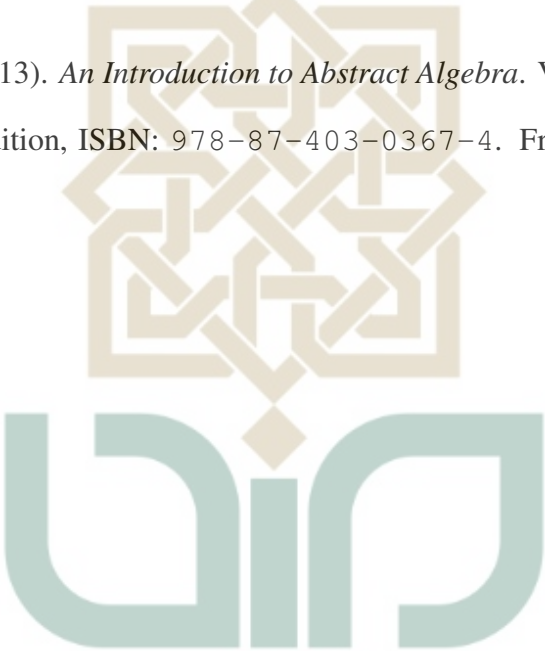
- Judson, T. W. (2022). *Abstract Algebra: Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University / University of Puget Sound / Universidad de Chile, annual edition 2022 edition, <http://abstract.pugetsound.edu>. Sage Exercises by Robert A. Beezer. Traducción al español por Antonio Behn.
- Kelarev, A. & Quinn, S. J. (2002). Directed graphs and combinatorial properties of semigroups. *Journal of Algebra*, 251(1):16–26.
- Kelarev, A., Quinn, S. J., & Smolikova, R. (2001). Power graphs and semigroups of matrices. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 63(2):341–344.
- Kelarev, A. V. & Quinn, S. J. (2000). A combinatorial property and power graphs of groups. *Contributions to general algebra*, 12:3–6.
- Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra*. Birkhäuser, Boston, ISBN: 978-0-8176-4684-4, DOI: 10.1007/978-0-8176-4685-1.
- Kreher, D. L. (2020). Group theory notes. Lecture Notes. Accessed via course materials.
- Kumar, A., Selvaganesh, L., Cameron, P. J., & Chelvam, T. T. (2021). Recent developments on the power graph of finite groups—a survey. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 18(2):65–94.
- Lee, G. T. (2018). *Abstract Algebra: An Introductory Course*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer International Publishing AG, Thunder Bay, ON, Canada, 1 edition, ISBN: 978-3-319-77648-4, DOI: 10.1007/978-3-319-77649-1.
- Ma, X., Walls, G. L., & Wang, K. (2019). Power graphs of (non) orientable genus two. *Communications in Algebra*, 47(1):276–288.

- Malik, D. S., Mordeson, J. N., & Sen, M. K. (2007). *Introduction to Abstract Algebra*. Creighton University, United States. Available for free download.
- Maris, I. M., Adawiyah Tarmizi, R., & Md Husin, N. H. (2025). The structural properties of the power graph of symmetric groups. *EDUCATUM Journal of Science, Mathematics and Technology (EJSMT)*, 12(Special Issue):45–52, ISSN: 2289-7070, DOI: 10.37134/ejsmt.vol12.sp.5.2025.
- McKemmie, E. (2014). Power graphs of finite groups. *BA project, Oxford University*.
- McKernan, J. (2013). 18.703 Modern Algebra, Spring 2013. MIT OpenCourseWare. Lecture Notes. Diakses dari <https://ocw.mit.edu/courses/18-703-modern-algebra-spring-2013/>.
- Munandar, A. (2022). *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*. Sleman : Deepublish (CV Budi Utama).
- Pinzauti, N. (2022). Power graphs of finite groups. Master's thesis, Università degli Studi di Firenze. arXiv:2208.13042.
- Pourghobadi, K. & Jafari, S. H. (2018). The diameter of power graphs of symmetric groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, 17(12):1850234.
- Rosen, K. H. (2011). *Elementary Number Theory and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, 6th edition.
- Rotman, J. J. (1984). *An introduction to the theory of groups*. Allyn and Bacon, Boston.
- Sagan, B. E. (2001). *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Graduate Texts in Mathematics.

Springer Science+Business Media, LLC, New York, second edition, ISBN: 978-1-4419-2869-6.

Saoub, K. R. (2021). *Graph Theory: An Introduction to Proofs, Algorithms, and Applications*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1st edition, ISBN: 978-0367432997, <https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.1201/9780429327509>.

Taylor, C. K. (2013). *An Introduction to Abstract Algebra*. Ventus Publishing ApS, first edition edition, ISBN: 978-87-403-0367-4. Free E-Book from bookboon.com.



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA