INVERS SEMU *(PSEUDO-INVERS)* DALAM SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Skripsi

untuk memenuhi sebagian persyaratan

memperoleh derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

Diajukan oleh

Okta Arfiyanta

08610016

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UIN SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2013

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka saya selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Okta Arfiyanta
NIM	: 08610016
Judul Skripsi	: Invers Semu *(Pseudo-invers)* dalam Sistem Persamaan Linear

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang Matematika.

Dengan ini saya mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya saya ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. Wb

Yogyakarta, 11 Maret 2013

Pembimbing I

Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si

NIP. 19660731 200003 2 001

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/1132/2013

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Invers Semu *(Pseudo-invers)* dalam Sistem Persamaan Linear

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :
Nama : Okta Arfiyanta
NIM : 08610016
Telah dimunaqasyahkan pada : 02 April 2013
Nilai Munaqasyah : A/B
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Dra. Khurul Wardati, M.Si.
NIP. 19660731 200003 2 001

Penguji I

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc
NIDN. 0513018402

Penguji II

Malahayati, M.Sc
NIP.19840412 201101 2 010

Yogyakarta, 24 April 2013
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
YOGYAKARTA
UIN SUNAN KALIJAGA

Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D
NIP. 19580919 198603 1 002

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Okta Arfiyanta

NIM : 08610016

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri dan sepanjang pengetahuan penulis tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis orang lain, dan atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian Tugas Akhir di Perguruan Tinggi lain, kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 11 Maret 2013

Yang menyatakan

<u>Okta Arfiyanta</u>

NIM. 08610016

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat serta hidayah-Nya. Atas ridho-Nya penulis dapat menyelesaikan penelitian dalam skripsi ini. Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun umatnya menuju jalan yang terang.

Penyusunan skripsi ini adalah sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika. Skripsi ini berisi tentang pembahasan invers semu *(Pseudo-invers)* dalam sistem persamaan linear.

Saat proses penyusunan skripsi ini, penulis telah banyak mendapat bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Ibu Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si selaku Pembantu Dekan I Fakultas Sains dan Teknologi, sekaligus pembimbing pertama yang telah meluangkan waktu dan fikiran dalam memberikan bimbingan, arahan, motivasi, dan ilmu dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Muchamad Abrori, S.Si., M.Kom selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Bapak/Ibu Dosen dan seluruh Staf Karyawan Fakultas Sain dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta atas ilmu, bimbingan dan pelayanan selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini selesai.

5. Bapak M. Zaki Riyanto, M.Sc. dan Mas Arif Herlambang Utama, S.Si. yang memberikan ide dan buku referensi mengenai penelitian dalam skripsi ini.
6. Keluarga Pertamaku : Kedua Orang Tua, Mas Lanang, Satriya, dan Simbah.
7. Keluarga Keduaku yaitu teman-teman SMA N 1 Kalasan seperti : Rion, Ogex, Amce, Surotu (Alm), Anggit, Koprol, Bewel, Cebi, Jumpezt, Erlin, Nia, Kiki, Nunung dll. *Mari Kita Cari Kesuksesan Kita Masing-masing dan Suatu Saat Nanti Kita Akan Bertemu dengan Kesuksesan Kita Masing-masing,, Aminnn…*
8. Keluarga Ketigaku yaitu teman-teman kampus ada: Mbah Riyanto, Tarjo, Adib, Ranto, Bowo, Imron, Tosa, Bayu, Rifqi, Hani, Aesa, Ria, Lala, Very, Elfa, Ipang dll. *Semangatlah dalam Menggapai Mimpi dan Cita-cita Kalian Masing-masing,,Oke…*
9. Dan Spesial buat Neng Lia : *"You Know Everything What I Want To Say.."*
10. Adek-adek Angkatan Matematika 2008 ke bawah : *Kalianlah Generasi Bangsa Ini,,,Semangatlah dalam Menuntut Ilmu Kawan!!!*

Penulis sangat menyadari bahwa skripsi ini masih banyak sekali kekurangan dan kesalahan, Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangan untuk menyempurnakan skripsi ini akan sangat penulis nantikan. Kritik dan saran tersebut dapat disampaikan lewat email *cry_thinks@yahoo.co.id*. Semoga karya sederhana ini dapat bermanfaat kepada para pembaca.

Yogyakarta,11 Maret 2013

Penulis

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada :

- Bapak dan Ibuku yang telah membesarkan, mendidik, dan mendo'akanku.
- Guru-guru mulai dari SD (terimakasih telah mengajarkanku bisa menulis dan membaca), SMP (Bu Indah, dan Bu Kartini), dan SMA (Pak Pratomo dan Pak Herlin) yang telah mengajarkanku bahwa matematika itu menyenangkan.
- Dosen-dosen Matematika UIN Sunan Kalijaga (terimakasih ilmu-ilmu yang Beliau berikan kepada kami)
- Keluarga Besar Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga.

MOTTO

"Gapailah Ilmu Itu Setinggi Mungkin yang Kamu Bisa…"

"Cita-cita Adalah Impianku, Bahagia Caranya…"

"Tantangan dan Masalah Merupakan Tanda Bahwa Kita Masih Hidup"

(Parlindungan Marpaung)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

$\vec{x}$	: vektor x
$m \times n$	: ukuran suatu matriks dengan m baris dan n kolom
$[\quad]$	: notasi suatu matriks
$A_{m\times n}$	: matriks A yang berukuran $m \times n$
$[A\ \vec{b}]$	: gabungan matriks A dengan $\vec{b}$
a_{ij}	: entri-entri dari matriks A pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$
$\mathbb{N}$	: himpunan semua bilangan asli
$\mathbb{Z}$	: himpunan semua bilangan bulat
$\mathbb{Q}$	: himpunan semua bilangan rasional
$\mathbb{R}$	: himpunan semua bilangan real
$\mathbb{C}$	: himpunan semua bilangan kompleks
$\mathbb{C}^{m\times n}$	: matriks berukuran m baris dan n kolom dengan entri bilangan kompleks
$\mathbb{C}^n$	: matriks kolom n dengan entri bilangan kompleks
$\sum$	: notasi sigma
$\forall$	: untuk setiap
$\exists$	: untuk suatu atau terdapat
$\in$	: elemen dari
$\subseteq$	: subset (himpunan bagian) atau sama dengan
I	: matriks identitas
$\boldsymbol{O}$	: matriks nol

A^{-1}	: invers dari matriks A
$\det(A)$	: determinan dari matriks A
Adj (A)	: adjoin dari matriks A
$\bar{A}$	: konjugat dari matriks A
A^T	: transpos dari matriks A
A^H	: transpos konjugat dari matriks A
$col(A)$	: ruang kolom dari matriks A
$row(A)$	: ruang baris dari matriks A
$null(A)$	: ruang nul dari matriks A
rank (A)	: rank dari matriks A
SPL	: Sistem persamaan linear
V	: ruang vektor
F	: lapangan atau *field*
$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$	: hasilkali dalam dua vektor
$\|\vec{u}\|$	: norma/panjang dari vektor u
$\|A\|$	: norma dari matriks A
$d(\vec{u},\vec{v})$	: jarak antara vektor u dengan vektor v
λ	: nilai eigen
σ	: nilai singular
A^g	: invers matriks tergeneralisasi dari matriks A
A^+	: invers semu dari matriks A
$trace(A)$	: trace dari matriks A
P	: proyektor

$\perp$	: ortogonal/tegak lurus
$\blacksquare$	: terbukti

ABSTRAK

Suatu matriks akan mempunyai invers dengan syarat berukuran $n \times n$ dan *nonsingular*. Sehingga matriks berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$ atau *singular* inversnya tidak terdefinisi. Dengan memperumum sifat invers matriks $n \times n$ dan *nonsingular*, didapatkan konsep invers semu *(pseudo-invers)*. Konsep invers semu berguna untuk mendefinisikan invers dari sebarang matriks. Invers semu dari matriks A dinotasikan A^{+}.

Sistem persamaan linear $A\vec{x} = \vec{b}$ dapat konsisten maupun tak konsisten. Sistem persamaan linear tersebut mempunyai solusi tunggal jika A *full column rank*. Aplikasi invers semu dalam sistem persamaan linear tersebut adalah vektor $\vec{x} = A^{+}\vec{b}$ yang merupakan solusi kuadrat terkecil *(least square solution)* dan mempunyai jarak terkecil *(least norm)*. Sehingga invers semu memberikan solusi penyelesaian pendekatan terbaik untuk sistem persamaan linear tersebut.

Teori di atas dapat disajikan ke dalam bentuk program yaitu dengan bahasa pemrograman Matlab. Implementasi tersebut berguna untuk mempermudahkan perhitungan dalam mencari solusinya.

Kata kunci : invers matriks, invers semu *(pseudo-invers)*, sistem persamaan linear, solusi kuadrat terkecil *(least square solution)*.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu dasar yang memegang peranan penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan lain di dunia. Aljabar merupakan salah satu ilmu dalam matematika. Aljabar dipilah menjadi beberapa kategori berikut ini : aljabar dasar, aljabar abstrak, aljabar linear, aljabar universal, dan aljabar komputer. Aljabar linear adalah bidang studi matematika yang mempelajari sistem persamaan linear, ruang vektor, serta transformasi linear. Matriks dan operasinya merupakan hal yang berkaitan erat dengan bidang aljabar linear (Wikipedia: 2012).

Salah satu permasalahan pada bidang aljabar adalah menyelesaikan suatu sistem persamaan $A\vec{x} = \vec{b}$, untuk suatu matriks A serta vektor $\vec{x}$ dan $\vec{b}$. Invers suatu matriks mempunyai peranan penting dalam penyelesaian sistem persamaan linear. Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ (persegi), terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik *(invertible)* dan B dinamakan invers dari A, ditulis $B = A^{-1}$ (Anton, H & Rorres, C: Jilid I: 2004: 46). Suatu matriks A dikatakan *nonsingular* jika $\det(A) \neq 0$ dan *singular* jika $\det(A) = 0$.

Salah satu metode yang umum digunakan untuk menyelesaikan permasalahan sistem persamaan linear $A\vec{x} = \vec{b}$ adalah dengan melakukan serangkaian operasi baris/kolom elementer untuk membawa matriks A menjadi bentuk eselon baris tereduksi. Dengan membentuk matriks $[A\ \vec{b}]$ selanjutnya dioperasikan baris/kolom elementer sehingga menjadi $[I\ \ \vec{x}]$ dengan $\vec{x}$ merupakan solusi penyelesaian dari sistem $A\vec{x} = \vec{b}$. Selain cara tersebut, dapat pula digunakan cara mencari invers dari matriks A yang dinotasikan A^{-1}. Solusi dari sistem persamaan linear tersebut berbentuk $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Dari definisi invers pada hal. 1 alinea kedua dapat disimpulkan bahwa suatu matriks akan mempunyai invers dengan syarat berukuran $n \times n$ (persegi) dan *nonsingular*, sehingga matriks berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$ atau *singular*, inversnya tidak terdefinisi. Setiap matriks A berukuran $n \times n$ dan *nonsingular* mempunyai invers tunggal yang dinotasikan A^{-1} maka akan memenuhi sifat : $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$, dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, dengan $(A)^T$ dan $(A)^H$ notasi dari transpos dan transpos konjugat dari matriks A (Ben-Israel, A & Greville, T.N.E : 1974: 1). Selanjutnya sifat invers dapat diperumum menjadi jika A *nonsingular*, $B = A^{-1}$ maka memenuhi sifat $ABA = A, BAB = B, (BA)^H = BA$, dan $(AB)^H = AB$.

Misalkan :

$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Pasangan matriks X dengan Y memenuhi keempat sifat invers pada hal. 2 alinea pertama baris 9. Namun menurut definisi invers pada hal. 1 alinea kedua, Y tidak bisa dikatakan invers dari X karena $XY = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \neq I$. Konsep invers matriks tergeneralisasi muncul untuk menggeneralisasi pengertian invers matriks. Pada skripsi ini, akan dibahas dua jenis invers matriks tergeneralisasi yaitu invers tergeneralisasi dan invers semu *(Pseudo-invers)*.

Solusi dari sistem persamaan linear melatar-belakangi penulis menyusun penelitian ini. Sejauh ini, banyak penelitian yang hanya menaruh perhatian pada sistem persamaan linier yang konsisten. Suatu sistem persamaan linear $A\vec{x} = \vec{b}$ yang mempunyai setidaknya satu solusi maka sistem tersebut dikatakan konsisten, sedangkan suatu sistem persamaan linear yang tidak memiliki solusi disebut tak konsisten. Akan tetapi, sistem linear yang tak konsisten juga penting dalam berbagai aplikasi di bidang fisika. Sangat umum dijumpai sebuah situasi dengan beberapa permasalahan fisika menghasilkan sebuah sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$, yang seharusnya konsisten dalam tataran teoritis namun menjadi tidak demikian karena adanya "kesalahan-kesalahan pengukuran" pada entri A dan $\vec{b}$ yang mengubah sistem menjadi tak konsisten (Anton, H & Rorres, C: Jilid I: 2004: 354). Suatu matriks $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, ruang kolom A yang dinotasikan $col(A)$ adalah himpunan $V = \{A\vec{x} | \vec{x} \in \mathbb{C}^n\}$.

Misalkan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan tersebut tidak memiliki solusi. Salah satunya, disebabkan karena $\vec{b}$ bukan merupakan elemen dari $col(A)$. Sistem persamaan tersebut memiliki jumlah persamaan yang lebih banyak dari jumlah peubah bebasnya. Karena itu, solusi pada sistem persamaan tersebut dapat dipilih sebagai suatu vektor $\vec{x} \in col(A)$ yang jaraknya dengan $\vec{b}$ paling pendek (minimal) dibandingkan vektor-vektor lain dalam $col(A)$. Solusi tersebut akan “mendekati” solusi yang memenuhi sistem persamaan $A\vec{x} = \vec{b}$.

Jika sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ tak konsisten maka $\vec{b} \notin col(A)$ dan untuk setiap $\vec{x}$, $\|\vec{b} - A\vec{x}\| > 0$. Dengan demikian dapat dibentuk vektor residual $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}$ dan akan dicari $\vec{x} \in col(A)$ sehingga norma $\vec{r}$ minimal. Agar jarak/norma $\vec{r}$ minimal, $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}$ harus ortogonal terhadap $col(A)$.

Diasumsikan $A\vec{x} = \vec{b}$ tak konsisten dan A *full column rank*, maka A memiliki minimal banyak baris atau kolom. Suatu sistem

$$A^H A\vec{x} = A^H b$$

disebut persamaan normal untuk sistem $A\vec{x} = \vec{b}$. Sistem permasalahan $A^H A\vec{x} = A^H\vec{b}$ disebut sebagai persamaan normal dari metode kuadrat terkecil *(Least Square)*. Sistem permasalahan tersebut dapat diubah bentuknya menjadi $\vec{x} = \left(A^H A\right)^{-1} A^H\vec{b}$. Matriks $(A^H A)^{-1}A^H$ disebut invers semu *(Pseudo-invers)* dari matriks A. Dapat dibuktikan bahwa solusi dari sistem persamaan normal tersebut adalah tunggal.

Beberapa hal tersebut yang melatar-belakangi penulis untuk mengkaji lebih dalam mengenai konsep mencari invers dan mencari solusi dari sistem persamaan linear konsisten maupun tak konsisten. Pada skripsi ini, penulis memilih konsep invers semu *(Pseudo-invers)* sebagai kajian utama untuk mencari invers suatu matriks dan mencari solusi sistem persamaan linear. Sebagai aplikasinya penulis akan membentuk suatu kasus yang dibentuk ke dalam sistem persamaan dan menyelesaikannya.

1.2. Batasan Masalah

Pembatasan masalah dalam suatu penelitian sangatlah penting, guna menghindari kesimpangsiuran terhadap objek dari suatu penelitian dan untuk membantu penulis lebih fokus dan terarah sesuai dengan tema penelitian. Pada skripsi ini akan dibahas tentang cara mencari invers semu *(Pseudo-invers)* dari sebarang matriks. Serta membentuk suatu kasus (data sekunder) ke dalam sistem persamaan linear dan menyelesaikannya dengan invers semu *(Pseudo-invers)*. Pada skripsi ini tidak membahas secara detail mengenai kasus-kasusnya, namun hanya fokus mencari solusi penyelesaiannya.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latarbelakang dan batasan masalah di atas dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut :

1. Bagaimana invers semu *(Pseudo-invers)* dari matriks A berukuran $m \times n$ beserta sifat-sifatnya?
2. Bagaimana aplikasi dari invers semu *(Pseudo-invers)* dalam sistem persamaan linear?
3. Bagaimana membentuk suatu kasus ke dalam sistem persamaan linear dan menyelesaikannya dengan invers semu *(Pseudo-invers)*?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui invers semu *(Pseudo-invers)* dari matriks A berukuran $m \times n$ beserta sifat-sifatnya.

2. Mengetahui aplikasi invers semu *(Pseudo-invers)* dalam penyelesaian sistem persamaan linear yang konsisten maupun tak konsisten.
3. Mencari solusi suatu kasus yang dibentuk ke dalam sistem persamaan linear dengan invers semu *(Pseudo-invers)*.

1.5. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain sebagai berikut:

1. Memberi pengetahuan tentang invers matriks berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$ atau matriks *singular* yang disebut invers semu *(Pseudo-invers)*.
2. Memberi pengetahuan tentang aplikasi invers semu *(Pseudo-invers)* dalam mencari solusi persamaan linear konsisten maupun tidak konsisten.

1.6. Tinjauan Pustaka

Penulisan skripsi ini terinspirasi dari skripsi Ikhwanudin Achmad (2007), mahasiswa UGM yang membahas tentang invers matriks tergeneralisasi dan penerapannya pada Cipher Hill, yaitu salah satu Cipher dalam bidang kriptografi. Skripsi ini memberikan gambaran bagaimana mencari invers sebarang matriks, yang dengan entri bilangan matriks mengandung pesan rahasia yang sudah diterjemahkan dalam bentuk bilangan. Kemudian invers tersebut berguna sebagai kunci untuk mengetahui pesan aslinya yang sebelumnya telah di enkripsi. Selain itu, penulis juga membuat program dengan menggunakan software Octave.

Skripsi Arif Herlambang Utama (2010), mahasiswa UIN Sunan Kalijaga yang membahas tentang matriks invers tergeneralisasi atas lapangan bilangan kompleks yang diaplikasikan pada jaringan listrik. Skripsi ini memberikan gambaran bahwa invers sebarang matriks digunakan dalam sistem persamaan linear yang dibentuk dari jaringan listrik *n*-port.

Skripsi yang Sri Rahayu (2007), mahasiswa UNNES yang membahas tentang matriks invers tergeneralisasi atas bilangan real dan mengaplikasikan matriks invers tergeneralisasi pada solusi sistem persamaan linear. Skripsi ini memberikan gambaran bahwa konsep invers matriks tergeneralisasi dapat menyelesaikan sistem persamaan linear. Masalah sistem persamaan linear dalam penelitian ini hanya fokus pada sistem persamaan linear yang konsisten.

Pada skripsi ini, akan dibahas invers semu *(Pseudo-invers)* dengan entri-entri matriksnya atas bilangan kompleks. Invers semu *(Pseudo-invers)* ini digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear konsisten maupun tidak konsisten. Sebagai aplikasi terhadap dunia nyata, penulis mencoba mencari suatu kasus yang akan dibentuk ke dalam sistem persamaan linear kemudian mencari solusinya dengan menggunakan invers semu *(Pseudo-invers)*. Selain itu, penulis juga membuat program dalam bahasa pemrograman Matlab. Program tersebut menggunakan software Matlab yang dimaksudkan untuk mempermudahkan dalam perhitungan.

Penulisan penelitian ini mengacu pada literatur utama yang bersumber dari buku yang ditulis oleh Jack L. Goldberg, buku tersebut membahas tentang dasar-dasar dalam aljabar linear elementer, dekomposisi matriks, invers semu *(Pseudo-invers)*, aplikasi terhadap sistem persamaan linear serta perintah-perintah dalam software Matlab.

Selain tinjauan pustaka yang telah digambarkan di atas masih ada referensi lain yang digunakan oleh penulis yang berupa buku-buku lain ataupun situs internet sebagai referensi pelengkap guna menunjang kelengkapan penelitian.

BAB V
PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil studi literatur yang telah penulis lakukan mengenai invers semu *(Pseudo-invers)* dalam sistem persamaan linear, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Invers semu *(Pseudo-invers)* yang dinotasikan A^+ adalah invers dari sebarang matriks A. Untuk mengkonsruksi invers semu *(Pseudo-invers)*, dibutuhkan dekomposisi nilai singular dari suatu matriks tersebut. Beberapa sifat invers semu *(Pseudo-invers)* yang berkaitan dengan invers dari matriks persegi dan *nonsingular* yaitu, jika matriks A *invertible* maka $A^+ = A^{-1}$. Selain itu, jika matriks A *full column rank* maka $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$ dengan A^H adalah transpos konjugat dari matriks A.
2. Invers semu *(Pseudo-invers)* dapat dimanfaatkan untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan linear. Suatu sistem persamaan linear $A\vec{x} = \vec{b}$ dapat konsisten maupun tak konsisten. Salah satu kegunaan invers semu *(Pseudo-invers)* adalah mencari solusi pendekatan sistem persaamaan linear yang tak konsisten. Suatu sistem persamaan linear $A\vec{x} = \vec{b}$ akan mempunyai solusi tunggal jika A *full column rank*. Hubungan invers semu *(Pseudo-invers)* dengan sistem persamaan linear $A\vec{x} = \vec{b}$ adalah vektor $\vec{x}_m = A^+\vec{b} = (A^H A)^{-1} A^H \vec{b}$ merupakan solusi kuadrat terkecil *(least square)* dan mempunyai jarak terkecil *(least norm)*. Dengan kata lain invers semu

memberikan solusi pendekatan terbaik untuk sistem persamaan linear $A\vec{x} = \vec{b}$.

5.2. Saran

Berdasarkan pada proses penelitian yang telah penulis lakukan, maka dapat disampaikan beberapa saran berikut :

1. Skripsi ini hanya membahas gambaran kecil tentang aplikasi invers semu *(Pseudo-invers)*. Selain itu, invers semu *(Pseudo-invers)* dapat diaplikasikan di berbagai bidang seperti kriptografi, statistik, dan bidang lainnya.
2. Skripsi ini menggunakan metode dekomposisi nilai singular dalam menentukan invers semu *(Pseudo-invers)* sehingga dapat dikembangkan dalam menentukan invers semu *(Pseudo-invers)* dengan metode yang lain.
3. Invers semu juga dapat dikaitkan dengan aljabar abstrak seperti pada ring.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Bandung: Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C. 1987. *Penerapan Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Jilid I*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C. 2005. *Aljabar Linear Elementer Jilid II*. Jakarta: Erlangga.

Arif Herlambang U. 2010. *Aplikasi Matriks Invers Tergeneralisir Pada Jaringan Listrik*. Skripsi. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas SAINTEK UIN.

Ben-Israel, A dan Greville, T.N.E.1974. *Generalized Inverses Theory and Applications*. New York: Springer-Verlag.

Burden, Richard.L dan Faires, J.Douglas. 1997. *Numerical Analysis Sixth Edition.* California: Brook/Cole Publishing Inc.

Boullion, Thomas L. dan Odell, Patruck L. 1971. *Generalized Inverse Matrices.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Goldberg, J.L. 1991. *Matrix Theory with Applications.* New York: Mc Graw-Hill, Inc.

Ikhwanudin Achmad. 2007. *Aplikasi Invers Matriks Tergeneralisasi Pada Chipher Hill.* Skripsi. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM.

Leon, Steve J. 1999. *Aljabar Linear dan Applikasinya*, Jakarta: Erlangga.

Setiadji. 2008. *Aljabar Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu

Setiadji. 2006. *Matriks Invers Tergeneralisasi*. Yogyakarta: Pascasarjana UGM.

Scheick, J.T., 1997. *Linear Algebra with Applications, International edition*. Singapore: Mc Graw-Hill, Inc.

Sri Rahayu. 2007. *Invers Matriks Tergeneralisasi dalam Sistem Persamaan Linear*. Skripsi. Semarang: Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNNES.

Wikipedia, *Aljabar*, diunduh dari http://id.wikipedia.org/wiki/Aljabar pada tanggal 13 September 2012, pukul 11.36 WIB.

Wikipedia, *Aljabar linear*, dari http://id.wikipedia.org/wiki/Aljabar_linear diakses pada tanggal 13 September 2012, pukul 11.54 WIB.

http:/ wijna.web.ugm.ac.id/Maw-DekomposisiMatriks.pdf, diunduh pada tanggal 07 September 2012, pukul 13.34 WIB.

http://ratnarianthi.wordpress.com/2010/12/29/aproksimasi-terbaik-kuadrat-terkecil/ diakses 05 november, pukul 11:27 WIB

KODE PROGRAM

1. Program 1

```
function A= masuk (m,n)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program untuk input matriks secara manual
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
for i=1:m
    for j=1:n
        A(i,j)= input(['Nilai A(',num2str(i),',',num2str(j),') = ']);
    end
end
```

2. Program 2

```
function cdet(A)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program untuk mencari determinan matriks persegi
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
determinan=det(A)
end
```

3. Program 3

```
function jdet(B)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program mengetahui matriks persegi singular atau non singular
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
if (B==0)
    disp ('Singular')
else
    disp ('Non Singular')
end
```

4. Program 4

```
function invers(C)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program untuk invers matriks khusus persegi
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
inversnya=inv(C)
end
```

5. Program 5

```
function pinvers(D)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program untuk invers semu dari sebarang matriks
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
pseudoinversnya= pinv(D)
end
```

6. Program 6

```
function rankmatriks (A)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program untuk mengetahui jenis matriks berdasarkan rank
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
[m,n]=size(A);
r=rank(A);
disp (['baris :', num2str(m)]);
disp (['kolom :', num2str(n)]);
disp (['rank : ', num2str(r)]);

if m==r
    disp ('full row rank')

elseif n==r
    disp ('full column rank')

else

    disp ('No full row or column rank')
end
```

7. Program 7

```
function pinverscolumn(A)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program mencari invers matriks yang full coloumn rank
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
[m,n]=size(A);
r=rank(A);
if r==n
    B=A'*A;
    C= inv(B);
    Y=C*A';
    disp (' Invers Semu matriks anda adalah ');
    disp (Y);
else
    disp ('Maaf Matriks Anda Tidak Full Column Rank')
end
end
```

8. Program 8

```
function pinversrow(A)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program mencari invers matriks yang full row rank
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
[m,n]=size(A);
r=rank(A);
if r==m
    B=A*A';
    C= inv(B);
    X=A'*C;
    disp (' Invers Semu Matriks Anda adalah ');
    disp (X);
else
    disp ('Maaf Matriks Anda Tidak Full Row Rank')
end
end
```

9. Program 9

```
function tsvd (A);
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program mencari SVD suatu Matriks dan Inversnya
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
disp ('==========================================');
disp ('Dekomposisi Matriks Anda : (A=USV*) dengan');
[U S V]=svd(A)
disp ('==========================================');
disp (' ')
disp ('>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>');
disp ('Menurut Teorema Dekomposisi Nilai Singular ');
disp ('Invers Matriks Anda : ');
X=V*pinv(S)*U';
disp (X);
disp ('>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>');
end
```

10. Program 10

```
function invmatriks;
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program untuk Mencari Invers Suatu Matriks
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
clc;
disp ('Pogram Invers Matriks')
A=[]; %untuk reset isi dari matriks
tekan;
pilihan=0;
while pilihan ~= 4
    clc;
    disp ('Menu Program')
    disp ('1. Input Matriks')
    disp ('2. Mencari Invers Anda')
    disp ('3. Dekomposisi Nilai Singular Matriks Anda')
    disp ('9. Keluar')
    pilihan=input('Silahkan Masukkan Pilihan :');


    switch pilihan
    case 1
        disp ('1')
        disp ('Ukuran Matriks Anda')
        m=input('Jumlah baris : ')
        n=input('Jumlah kolom : ')
        A=masuk(m,n)
        tekan;
    case 2
        disp ('2')
         ukuranmatriks(A);
        if m==n
            disp ('========================')
            disp ('Bentuk Matriks : Persegi')
            disp ('========================')
            disp ('Determinanya : ')
            D=det(A)
            disp ('========================')
           % disp (['D nya ',num2str(D)])
            if D ~= 0
                disp ('==================================')
                disp ('Jenis Matriks Anda : Non Singular')
                disp ('==================================')
                disp ('Maka Inversnya :')
                inv(A)
                disp ('==================================')
```

```
            else
                disp ('============================')
                disp ('Jenis Matriks Anda :Singular')
                disp ('============================')
                pinv(A)
            end
        else
            disp ('================================')
            disp ('Bentuk Matriks : Persegi Panjang')
            disp ('================================')
            disp ('Invers Semunya adalah : ')

            X=pinv(A)
            disp ('=================================')
        end
        tekan;
    case 3
        disp ('3')
        tsvd(A);
        tekan;


    case 9
        clc
        disp ('=========================================')
        disp ('Terimakasih Telah Menggunakan Program Ini')
        disp ('    Mohon Maaf Bila Banyak Kesalahan')
        disp ('   Kritik dan Saran Anda Kami Tunggu')
        disp ('           By: Okta Arfiyanta ')
        disp ('=========================================')
        break;
    end
end


function tekan;
disp('Silahkan Sembarang Tekan untuk Melanjutkan')
pause;
end
```

11. Program 11

```
function rankspl (A)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program untuk mengetahui jenis matriks berdasarkan rank
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
[m,n]=size(A);
[m,l]=size(b);
r1=rank(A);
r2=rank([A b]);
disp (['baris :', num2str(m)]);
disp (['kolom :', num2str(n)]);
disp (['rank matriks A: ', num2str(r1)]);
disp (['rank matriks [A b]: ', num2str(r2)]);

if r1==r2
    disp ('==================')
    disp ('SPL Anda KONSISTEN')
    disp ('==================')
else
    disp ('======================')
    disp ('SPL Anda TAK KONSISTEN')
    disp ('======================')
end
```

12. Program 12

```
function solnonhom (A)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program untuk Mengetahui Jenis Solusi SPL Non Homogen
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
[m,n]=size(A);
rl=rank(A);
if rl==n
    disp ('========================');
    disp ('Mempunyai Solusi Tunggal');
    disp ('========================');

elseif rl <min(m,n);
    disp ('=======================');
    disp ('Mempunyai Solusi Banyak');
    disp ('=======================');
else
end
```

13. Program 13

```
function solhom (A)
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program untuk mengetahui Solusi SPL Homogen
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
[m,n]=size(A);
rl=rank(A);
if rl==n
    disp ('==============');
    disp ('Solusi Trivial');
    disp ('==============');

elseif rl <min(m,n);
    disp ('==================');
    disp ('Solusi Non Trivial');
    disp ('==================')
else
end
```

14. Program 14

```
function solspl (A);
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program mencari Solusi Sistem Persamaan Linear Non Homogen
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
clc;
disp ('Pogram Solusi Sistem Persamaan Linear (Ax=b)')
A=[];b=[]; %untuk reset isi dari matriks
tekan;
pilihan=0;
while pilihan ~= 4
    clc;
    disp ('Menu Program')
    disp ('1. Input Matriks')
    disp ('2. Kekonsistenan SPL')
    disp ('9. Keluar')
    pilihan=input('Silahkan Masukkan Pilihan :');


    switch pilihan
    case 1
        disp ('1')
        disp ('============================')
        disp ('PASTIKAN BENTUK SPL ANDA Ax=b')
        disp ('============================')
        disp ('Ukuran Matriks A ')
        m=input('Jumlah baris : ')
        n=input('Jumlah kolom : ')
        A=masuk(m,n)
        disp ('Masukkan Matriks b yang berukuran (mx1)')
        b=masuk(m,1)
        tekan;
    case 2
        disp ('2')
        disp ('@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@')
        disp ('Mengecek SPL Konsisten atau Tak Konsisten')
        disp ('@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@')
        [m,n]=size(A);
        r1=rank(A);
        r2=rank([A b]);
        disp (['baris :', num2str(m)]);
        disp (['kolom :', num2str(n)]);
        disp (['rank matriks A: ', num2str(r1)]);
        disp (['rank matriks [A b]: ', num2str(r2)]);
```

```
        if r1==r2
            pilihan2=0;
            while pilihan2 ~=3
                clc;
                tekan;
                disp ('Karena rank(A)=rank([A b])')
                disp ('=======================')
                disp ('Maka SPL Anda KONSISTEN')
                disp ('=======================')
                disp('1.Jenis Solusi')
                disp('2.Solusi Penyelesaian')
                disp('3.Menu Program Utama')
                pilihan2=input ('Silahkan Masukkan Pilihan : ');
                switch pilihan2
                case 1
                    solnonhom (A)
                    tekan;
                case 2
                    disp ('Solusi Terbaiknya : ')
                    pinv(A)*b
                    tekan;
                end
            end


        else
            disp ('Karena rank(A)~=rank([A b])')
            disp ('SPL Anda TAK KONSISTEN')
            disp ('Invers Semu/Pseudo-inversnya : ')
            pinv(A)
            b
            disp ('Solusi Pendekatan Terbaiknya adalah : ')
            pinv(A)*b
        end
```

```
        tekan;

    case 9
        clc
        disp ('=========================================')
        disp ('Terimakasih Telah Menggunakan Program Ini')
        disp ('    Mohon Maaf Bila Banyak Kesalahan')
        disp ('   Kritik dan Saran Anda Kami Tunggu')
        disp ('           By: Okta Arfiyanta ')
        disp ('=========================================')
        break;
    end
end


function tekan;
disp('Silahkan Sembarang Tekan untuk Melanjutkan')
pause;
end
```

15. Program 15

```
function solspl2 (A);
%>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
% Program mencari Solusi Sistem Persamaan Linear Non Homogen
% Okta Arfiyanta
% Fakultas Sains dan Teknologi
% UIN Sunan Kalijaga
%<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
clc;
disp ('Pogram Solusi Sistem Persamaan Linear (Ax=b)')
A=[];b=[]; %untuk reset isi dari matriks
tekan;
pilihan=0;
while pilihan ~= 4
    clc;
    disp ('Menu Program')
    disp ('1. Input Matriks')
    disp ('2. Jenis Solusi')
    disp ('9. Keluar')
    pilihan=input('Silahkan Masukkan Pilihan :');
```

```
    switch pilihan
    case 1
        disp ('1')
        disp ('PASTIKAN BENTUK SPL ANDA Ax=b')
        disp ('Ukuran Matriks A ')
        m=input('Jumlah baris : ')
        n=input('Jumlah kolom : ')
        A=masuk(m,n)
        disp ('Matriks b yang berukuran (mx1)')
        b=zeros(m,1)
        tekan;
    case 2
        disp ('2')
        disp ('Jenis Solusi SPL')
        [m,n]=size(A);
        r1=rank(A);
        r2=rank([A b]);
        disp (['baris :', num2str(m)]);
        disp (['kolom :', num2str(n)]);
        disp (['rank matriks A: ', num2str(r1)]);
        disp (['rank matriks [A b]: ', num2str(r2)]);
        solhom (A)

        tekan;


    case 9
        clc
        disp ('=========================================')
        disp ('Terimakasih Telah Menggunakan Program Ini')
        disp ('    Mohon Maaf Bila Banyak Kesalahan')
        disp ('   Kritik dan Saran Anda Kami Tunggu')
        disp ('           By: Okta Arfiyanta ')
        disp ('=========================================')
        break;
    end
end


function tekan;
disp('Silahkan Sembarang Tekan untuk Melanjutkan')
pause;
end
```