

SKRIPSI

ENERGI GRAF NON-KOPRIMA ATAS GRUP DIHEDRAL



HAKIM ADIDARMA

22106010033

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2026

ENERGI GRAF NON-KOPRIMA ATAS GRUP DIHEDRAL

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



diajukan oleh

HAKIM ADIDARMA

22106010033

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2026



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Hakim Adidarma

NIM : 22106010033

Judul Skripsi : ENERGI GRAF NON-KOPRIMA ATAS GRUP DIHEDRAL

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Sieman, 9 Juni 2026

Pembimbing

Arif Munandar, M.Sc.

NIP. 19920721 201903 1 013



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1568/Un.02/DST/PP.00.9/07/2026

Tugas Akhir dengan judul : ENERGI GRAF NON-KOPRIMA ATAS GRUP DIHEDRAL

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : HAKIM ADIDARMA
Nomor Induk Mahasiswa : 22106010033
Telah diujikan pada : Jumat, 19 Juni 2026
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang
Arif Munandar, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 6a632b738239a



Penguji I
Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 6a632c570a4b0



Penguji II
Prof. Dr. Muhammad Wakhid Musthofa,
S.Si., M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6a45ff4fe5e3f



Yogyakarta, 19 Juni 2026
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6a66ef9222bc0

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Hakim Adidarma

NIM : 22106010033

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Sleman, 9 Juni 2026



Hakim Adidarma

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



Dengan penuh rasa syukur kepada Allah Swt. atas segala nikmat, kemudahan, dan pertolongan-Nya, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Almamater tercinta, tempat melangkah dalam menapaki lorong ilmu,

tempat mimpi-mimpi kecil menemukan arah untuk bertumbuh.

HALAMAN MOTTO



”Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.”

STATE ISLAMIC UNIVERSITY (Q.S. Al-Insyirah: 6)

”Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi manusia lainnya.”

YOGYAKARTA (HR. Ahmad)

”Hidup yang berarti bukanlah tentang seberapa besar yang dimiliki, melainkan
seberapa banyak manfaat yang dapat diberikan kepada sesama.”

~Penulis~

”Jika aku belum mampu menjadi alasan seseorang berhasil, setidaknya aku ingin
menjadi alasan seseorang tersenyum hari ini.”

~Penulis~

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Energi Graf Non-Koprime atas Grup Dihedral". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Noor Saif Muhammad Mussafi, S.Si., M.Sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
4. Arif Munandar, M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.

6. Ngatijah dan Jumadi, selaku Orang Tua saya yang senantiasa memberikan kasih sayang, doa, dukungan, serta pengorbanan yang tiada henti dalam setiap langkah perjalanan hidup dan pendidikan saya.
7. Hasan Adidarma, selaku kakak saya yang senantiasa memberikan doa, dukungan, motivasi, perhatian, dan semangat sehingga saya dapat menyelesaikan pendidikan dan skripsi ini.
8. Sekawan Pitu, yang telah menemani perjalanan akademik saya dengan kebersamaan, canda tawa, dukungan, dan semangat sehingga hari-hari di kampus menjadi penuh makna dan menyenangkan.
9. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Bantul, 3 Mei 2026

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA
Hakim Adidarma

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMBANG	xiv
INTISARI	xvi
ABSTRACT	xvii
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	5
1.3. Rumusan Masalah	5
1.4. Tujuan Penelitian	6
1.5. Manfaat Penelitian	6
1.6. Tinjauan Pustaka	7
1.7. Metode Penelitian	8
1.8. Sistematika Penulisan	9
II DASAR TEORI	11

2.1. Matriks	11
2.1.1. Operasi matriks	12
2.1.2. Jenis-jenis matriks	17
2.1.3. Determinan matriks	20
2.1.4. Nilai eigen	36
2.2. Grup	38
2.2.1. Order Grup dan Order Elemen	40
2.2.2. Grup Dihedral	42
2.3. Graf	48
2.3.1. <i>Adjacency</i> dan Insideni	49
2.3.2. Derajat Verteks	52
2.3.3. Graf non-koprima	54
2.3.4. Energi Graf	55
III Pembahasan	58
3.1. Energi pada graf non-koprima grup dehidral D_{2n} menggunakan matriks <i>adjacency</i>	58
3.2. Energi dari graf non-koprima grup dehidral D_{2n} menggunakan matriks jumlah derajat	70
3.3. Energi dari graf non-koprima grup dehidral D_{2n} menggunakan matriks seidel	80
IV PENUTUP	94
4.1. Kesimpulan	94
4.2. Saran	95
DAFTAR PUSTAKA	96
Curriculum Vitae	99

DAFTAR TABEL

1.1	Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian	8
-----	--	---



DAFTAR GAMBAR

1.1	Skema Metode Penelitian	9
2.1	Graf G	49
2.2	Graf K_7	50
2.3	Graf G untuk menunjukkan derajat suatu verteks	53
2.4	$\Gamma_{\mathbb{Z}_6}$	56
3.1	Γ_{D_8}	59
3.2	$\Gamma_{D_{18}}$	64

DAFTAR LAMBANG

$x \in A$	: x merupakan anggota dari A .
$\mathbb{N}$	: Himpunan semua asli.
$\mathbb{Z}$	: Himpunan semua bilangan bulat.
$\mathbb{Z}^+$	: Himpunan semua bilangan bulat positif.
$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan real.
$i \neq j$	: i tidak sama dengan j .
■	: Akhir suatu bukti.
$\rightarrow$	: Menuju.
$\sum_{i=1}^n a_i$	: Penjumlahan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
$p \Rightarrow q$	: Jika p maka q .
$\Leftrightarrow$	: Jika dan hanya jika.
$x \leftarrow a$	: Nilai a dimasukkan ke x .
D_{2n}	: Grup dihedral berorde $2n$.
$FPB(a, b)$	: Faktor persekutuan terbesar dari a dan b .
$\det(A)$	: Determinan dari matriks A .
R_a	: Baris ke a dari suatu matriks.
C_a	: Kolom ke a dari suatu matriks.
$a \equiv b \pmod{n}$	: a kongruen dengan b modulo n .
$G = \langle a, b \rangle$	: Grup G yang dibangkitkan oleh elemen a dan b .
$der(v_i)$	: Derajat dari verteks i .

- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$: Matriks A berordo $m \times n$ dengan entri a pada baris i dan kolom j .
- M_{ij} : Minor dari entri matriks baris ke- i dan kolom ke- j .
- C_{ij} : Kofaktor dari entri matriks baris ke- i dan kolom ke- j .
- $o(G)$: Order dari grup G .
- $|a|$: Order dari suatu elemen grup.
- $a|b$: a membagi habis b .
- $AM(G)$: Matriks *adjacency* dari graf G .
- $S(G)$: Matriks *seidel* dari graf G .
- $DS(G)$: Matriks jumlah derajat dari graf G .
- Γ_G : Graf non-koprima dari grup G .
- $E(G)$: Energi dari graf G .

INTISARI

ENERGI GRAF NON-KOPRIMA ATAS GRUP DIHEDRAL

Oleh

Hakim Adidarma

22106010033

Graf non-koprima merupakan graf yang titik-titiknya merepresentasikan elemen grup, sedangkan dua titik saling terhubung apabila orde dari kedua elemen tersebut tidak saling prima. Kajian energi graf menjadi salah satu topik penting dalam teori graf spektral karena berkaitan erat dengan nilai eigen dari matriks representasi graf. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh rumus umum energi graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} dengan $n = 2^k$ dan $n = p^k$, di mana p bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif. Penelitian ini dimulai dengan studi literatur dengan mengkaji berbagai teori yang berkaitan dengan grup dihedral, graf non-koprima, matriks representasi graf, determinan, dan nilai eigen, serta representasi matriks graf yang meliputi matriks *adjacency*, matriks jumlah derajat, dan matriks Seidel. Selanjutnya, dilakukan analisis terhadap bentuk matriks representasi graf untuk menentukan nilai eigen dan energi graf yang dihasilkan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa energi graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} dapat dinyatakan dalam bentuk rumus umum yang bergantung pada struktur grup dan jenis representasi matriks yang digunakan. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi bagi pengembangan kajian energi graf serta penerapan teori graf pada struktur aljabar.

Kata kunci : Energi graf, graf non-koprima, grup dihedral D_{2n} .

ABSTRACT

ENERGY OF NON-COPRIME GRAPHS ON DIHEDRAL GROUPS

By

Hakim Adidarma

22106010033

The non-coprime graph is a graph whose vertices represent the elements of a group, where two vertices are adjacent if the orders of the corresponding elements are not relatively prime. The study of graph energy is an important topic in spectral graph theory because it is closely related to the eigenvalues of graph representation matrices. This research aims to obtain general formulas for the energy of non-coprime graphs associated with the dihedral group D_{2n} for $n = 2^k$ and $n = p^k$, where p is an odd prime number and k is a positive integer. The research begins with a literature study by examining theories related to dihedral groups, non-coprime graphs, graph representation matrices, determinants, eigenvalues, and graph matrix representations, including the adjacency matrix, degree-sum matrix, and Seidel matrix. Furthermore, an analysis of the graph representation matrices is conducted to determine the eigenvalues and the resulting graph energies. The results show that the energy of non-coprime graphs associated with the dihedral group D_{2n} can be expressed in the form of general formulas that depend on the group structure and the type of graph representation matrix used. This research is expected to serve as a reference for further studies on graph energy and the application of graph theory to algebraic structures.

Keyword : Graph energy, non-coprime graph, dihedral group D_{2n} .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Perkembangan ilmu matematika, khususnya dalam bidang teori graf dan teori grup, menunjukkan peningkatan yang signifikan dalam beberapa dekade terakhir. Teori graf sebagai cabang matematika diskrit berperan penting dalam merepresentasikan berbagai struktur dan relasi, baik dalam konteks abstrak maupun aplikatif. Secara umum, graf merupakan struktur yang terdiri atas himpunan titik (*vertex*) dan himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik tersebut. Representasi graf banyak digunakan dalam berbagai bidang, seperti ilmu komputer, kimia, jaringan komunikasi, serta ilmu sosial, karena kemampuannya dalam memodelkan hubungan kompleks secara sederhana (Karang et al., 2025).

Salah satu perkembangan menarik dalam teori graf adalah kajian graf yang merepresentasikan suatu struktur dalam aljabar, khususnya grup. Dalam konteks ini, elemen-elemen grup direpresentasikan sebagai titik dalam graf, sementara relasi tertentu antar elemen digunakan untuk membentuk sisi (Asmarani et al. (2021)). Pendekatan ini memungkinkan eksplorasi sifat-sifat aljabar melalui perspektif grafis. Salah satu jenis graf yang cukup banyak diteliti adalah graf non-koprima (*non-coprime graph*), yaitu graf yang dibangun berdasarkan relasi keterbagian antara orde elemen-elemen dalam suatu grup.

Graf non-koprima dari suatu grup hingga kini menjadi objek kajian yang menarik karena memiliki keterkaitan erat dengan teori bilangan dan struktur grup.

Secara definisi, graf non-koprima dari grup G adalah graf dengan himpunan titik $G \setminus \{e\}$, di mana dua titik berbeda x dan y dihubungkan oleh sisi jika $\gcd(|x|, |y|) \neq 1$, dengan $|x|$ menyatakan orde elemen x . Graf ini menjadi objek kajian yang menarik karena memiliki potensi aplikasi yang signifikan dalam berbagai bidang, seperti memodelkan interaksi atom dalam molekul kompleks atau optimasi jaringan dengan memanfaatkan sifat spektralnya yang khas (Karang et al. (2025)).

Sebagai langkah awal dalam meneliti sifat-sifat graf non-koprima, graf direpresentasikan dalam bentuk matriks. Salah satu representasi yang paling umum adalah matriks *adjacency*, yaitu matriks persegi $A = [a_{ij}]$ yang elemennya bernilai 1 jika vertek i dan j saling terhubung oleh sisi, dan 0 jika tidak. Selain itu, terdapat pula matriks lain seperti matriks derajat, yaitu matriks persegi $A = [a_{ij}]$ yang elemennya bernilai $\deg(v_i) + \deg(v_j)$ jika vertek i dan j saling terhubung oleh sisi, dan 0 jika tidak (Karang et al. (2025)). Melalui representasi matriks ini, struktur graf yang semula bersifat diskrit dapat dikaji menggunakan pendekatan aljabar linear. Dalam konteks ini, konsep nilai eigen dan spektrum matriks menjadi sangat penting. Suatu matriks A dikaitkan dengan persamaan $Ax = \lambda x$, di mana λ adalah suatu skalar dan x adalah vektor tak nol. Skalar λ tersebut disebut sebagai nilai eigen dari matriks A , sedangkan x disebut sebagai vektor eigen yang bersesuaian. Himpunan semua nilai eigen dari suatu matriks kemudian disebut sebagai spektrum matriks (Munandar (2023)). Konsep ini menjadi penting karena melalui nilai eigen tersebut dapat diperoleh berbagai informasi mengenai sifat-sifat matriks, yang dalam konteks graf berkaitan erat dengan karakteristik struktur graf yang direpresentasikannya. Dengan demikian, penggunaan matriks dan analisis spektral menjadi jembatan yang menghubungkan struktur graf non-koprima dengan konsep energi graf yang akan dibahas pada bagian berikutnya.

Dalam kajian graf modern, salah satu konsep penting yang banyak diteliti adalah energi graf. Konsep energi graf pada awalnya berasal dari kajian kimia teoretis, khususnya dalam teori orbital molekul *Hückel* yang digunakan untuk memperkirakan energi elektron E pada molekul hidrokarbon terkonjugasi. Dalam pendekatan tersebut, struktur molekul direpresentasikan dalam bentuk graf, dengan atom sebagai verteks dan ikatan kimia sebagai sisi. Selanjutnya, energi total molekul diperkirakan melalui nilai eigen dari matriks yang merepresentasikan graf tersebut. Gagasan inilah yang kemudian berkembang dalam teori graf spektral dan melahirkan konsep energi graf (Balakrishnan (2004)). Energi graf didefinisikan sebagai jumlah nilai mutlak dari nilai eigen matriks yang merepresentasikan graf tersebut, seperti matriks *adjacency matrix*. Selain itu, berkembang pula konsep energi lain seperti energi jumlah derajat, yang didasarkan pada matriks jumlah derajat (Karang et al. (2025)).

Salah satu jenis grup yang sering digunakan dalam kajian graf adalah grup dihedral, yang dilambangkan dengan D_{2n} . Grup dihedral merupakan grup yang merepresentasikan simetri suatu poligon beraturan, yang mencakup rotasi dan refleksi. Struktur grup ini relatif sederhana, namun memiliki kekayaan sifat aljabar yang menarik untuk dikaji. Hal tersebut menjadikan grup dihedral sebagai objek yang menarik dalam penelitian yang menghubungkan teori grup dan teori graf (Shofiyulloh et al. (2024)).

Penelitian sebelumnya telah membahas energi graf non-koprima pada grup dihedral, khususnya untuk kasus $n = p^k$, dengan p merupakan bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif. Dalam penelitian tersebut, diperoleh rumusan energi graf berdasarkan matriks *adjacency* dan matriks jumlah derajat, yang menunjukkan hubungan antara struktur grup dan karakteristik spektral graf yang dihasilkan (Ka-

rang et al. (2025)). Selain itu, untuk kasus khusus $n = 2^k$, juga telah diperoleh hasil yang menunjukkan pola tertentu dalam nilai energi graf yang dihasilkan (Karang et al. (2025)).

Meskipun demikian, penelitian-penelitian tersebut masih terbatas pada penggunaan dua jenis matriks utama, yaitu matriks *adjacency* dan matriks jumlah derajat. Padahal, dalam teori graf spektral, terdapat banyak jenis matriks lain yang juga memiliki peran penting dalam mengkaji sifat graf, salah satunya adalah matriks Seidel. Matriks Seidel adalah matriks persegi $A = [a_{ij}]$ yang elemennya bernilai -1 jika vertek i dan j saling terhubung oleh sisi, bernilai 1 jika vertek i dan j tidak saling terhubung oleh sisi, dan 0 untuk lainnya (Sciriha & Collins (2019)).

Dengan mempertimbangkan hal tersebut, terdapat celah dalam penelitian ini yang dapat dikembangkan, yaitu dengan memperluas kajian energi graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} dengan memasukkan matriks seidel sebagai alat analisis tambahan. Pendekatan ini diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai energi graf, serta membuka kemungkinan ditemukannya rumus atau teorema baru yang belum terungkap dalam penelitian sebelumnya.

Penelitian ini masih berfokus pada nilai $n = 2^k$ dan $n = p^k$, dengan p bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif, karena kedua bentuk ini sangat menarik sebab merepresentasikan struktur grup yang memiliki karakteristik berbeda. Pada kasus $n = 2^k$ dengan k merupakan bilangan bulat positif, semua elemen memiliki keterkaitan tertentu dalam hal keterbagian, sedangkan pada kasus $n = p^k$ dengan p merupakan bilangan prima ganjil, terdapat pemisahan struktur yang lebih kompleks antara elemen rotasi dan refleksi. Perbedaan ini berdampak langsung pada bentuk graf non-koprima yang dihasilkan serta nilai energinya.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji dan

merumuskan teorema terkait energi graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} , untuk kasus $n = 2^k$ dan $n = p^k$, dengan memanfaatkan matriks *adjacency*, matriks jumlah derajat, serta memperkenalkan matriks seidel sebagai pendekatan baru. Penelitian ini dilakukan dengan studi literatur, dengan mengkaji berbagai referensi yang relevan serta mengembangkan hasil-hasil penelitian sebelumnya.

Diharapkan penelitian ini tidak hanya melengkapi kajian yang telah ada, tetapi juga memberikan kontribusi baru dalam pengembangan teori graf dan teori grup, khususnya dalam aspek energi graf. Selain itu, hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi bagi penelitian selanjutnya yang ingin mengkaji hubungan antara struktur aljabar dan sifat spektral graf secara lebih mendalam.

1.2. Batasan Masalah

Pembatasan masalah pada penelitian ini diperlukan agar pembahasan terfokuskan dan terarah. Penelitian ini dibatasi hanya membahas rumus atau teorema energi graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} dalam penelitian sebelumnya, dimana grup dihedral D_{2n} yang digunakan berfokus pada $n = 2^k$ dan $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana rumus umum energi matriks *adjacency* dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} pada $n = 2^k$ dan $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif?
2. Bagaimana rumus umum energi matriks jumlah derajat dari graf non-koprima

pada grup dihedral D_{2n} pada $n = 2^k$ dan $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif?

3. Bagaimana rumus umum energi matriks saidel dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} pada $n = 2^k$ dan $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui rumus umum energi matriks *adjacency* dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} pada $n = 2^k$ dan $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif.
2. Mengetahui rumus umum energi matriks jumlah derajat dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} pada $n = 2^k$ dan $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif.
3. Mengetahui rumus umum energi matriks saidel dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} pada $n = 2^k$ dan $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman mengenai proses mencari pola energi graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} , khususnya pada penggunaan matriks *adja-*

cency, matriks jumlah derajat, dan matriks seidel sebagai matriks representasinya.

2. Menjadi bahan referensi dan landasan bagi penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan energi graf, graf non-koprima, grup dihedral D_{2n} , maupun kajian tentang representasi matriks pada graf.

1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan skripsi ini bersumber dari buku, makalah, artikel, dan skripsi.

1. Artikel karya Karang et al., 2025 dengan judul *"Energy and Degree Sum Energy of Non-coprime Graphs on Dihedral Groups"* membahas tentang rumus energi matriks *adjacency* dan energi matriks jumlah derajat dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} dengan $n = p^k$, di mana p merupakan bilangan prima dan k adalah bilangan bulat positif. Artikel ini menjadi acuan utama dalam penelitian yang akan dilakukan, yaitu sebagian besar pembahasan dalam penelitian yang akan dilakukan diambil dari seluruh isi dalam artikel ini.
2. Artikel karya Sciriha & Collins, 2019 dengan judul *"Two-graphs and NSSDs: An algebraic approach"* membahas tentang penggunaan matriks involusi $M(\mu_1, \mu_2)$ untuk menentukan sifat struktural dan kombinatorial dari graf pada sebuah *regular two-graph*. Selain itu, studi ini juga menunjukkan bahwa graf konferensi (*conference graphs*) merupakan bentuk dari graf NSSD (*non-singular graph with a singular deck*) dengan sifat khusus sebagai graf *nutful*, yang pada akhirnya dapat mengungkap berbagai sifat spektral baru dari graf konferensi tersebut. Dalam isi artikel ini terdapat definisi matriks saidel, di-

mana dalam penelitian yang akan dilakukan matriks saidel akan digunakan sebagai salah satu representasi matriks pada graf.

Untuk memberikan gambaran yang lebih sistematis mengenai keterkaitan penelitian terdahulu dengan penelitian ini, berikut disajikan tabel yang memuat persamaan dan perbedaan masing-masing penelitian dengan fokus penelitian yang sedang dilakukan penulis.

Tabel 1.1 Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian

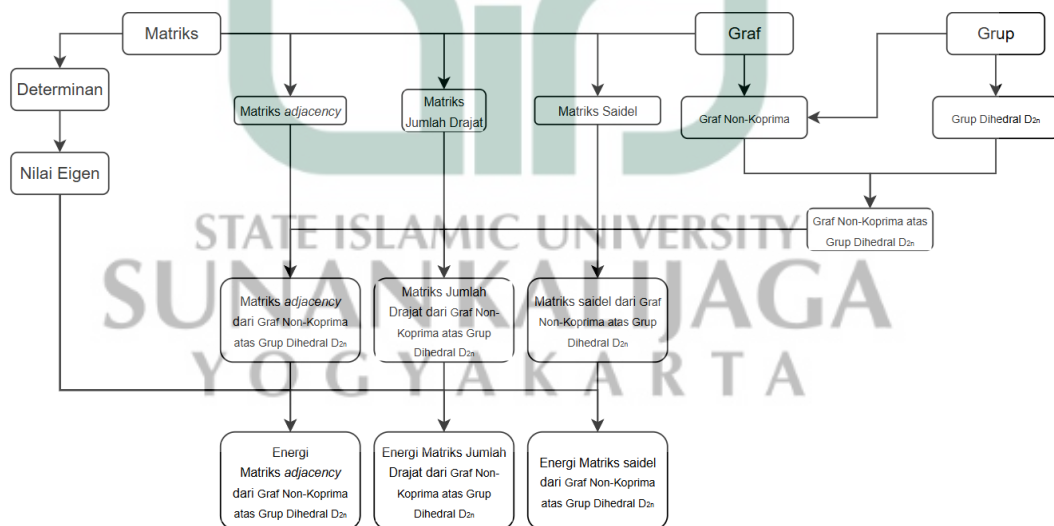
Judul (Tahun)	Penulis	Persamaan	Perbedaan
<i>Energy and Degree Sum Energy of Non-coprime Graphs on Dihedral Groups</i> (2025)	Gusti Yogananda Karang, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana, Nur Idayu Alimon, dan Nor Haniza Sarmin	Membahas energi graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} dengan $n = p^k$.	Penelitian ini menggunakan matriks Seidel sebagai representasi tambahan untuk menentukan energi Seidel graf non-koprima.
<i>Two-graphs and NSSDs: An Algebraic Approach</i> (2019)	Irene Sciriha dan Luke Collins	Menggunakan matriks Seidel untuk merepresentasikan graf dan mengkaji sifat-sifat spektralnya.	Penelitian ini menggunakan graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} sebagai objek penelitian dan berfokus pada energi Seidel.

1.7. Metode Penelitian

Penelitian ini penulis menggunakan studi literatur. Menggunakan referensi dari buku-buku, jurnal-jurnal terkait topik penelitian yaitu; konsep dasar energi graf, graf non-koprima, grup dihedral D_{2n} dan matriks. Adapun sumber literatur yang digunakan dalam penelitian ini mencakup buku, artikel jurnal, makalah dan

publikasi ilmiah lain yang relevan dengan topik yang diangkat. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan ini adalah:

1. Membahas konsep dasar dari matriks, grup dihedral D_{2n} , graf non-koprima, energi graf.
2. Membahas konsep dasar representasi matriks(matriks *adjacency*, matriks jumlah derajat, dan matriks saidel) dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} dengan $n = p^k$, di mana p merupakan bilangan prima dan k adalah bilangan bulat positif.
3. Mencari rumus umum energi matriks(matriks *adjacency*, matriks jumlah derajat, dan matriks saidel) graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} dengan $n = p^k$, di mana p merupakan bilangan prima dan k adalah bilangan bulat positif.



Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab, yaitu sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini membahas tentang dasar-dasar dari matriks, grup dan graf.
- BAB 3** : Bab ini membahas tentang dasar-dasar energi graf, rumus umum energi matriks (matriks *adjacency*, matriks jumlah derajat, dan matriks *saidel*) dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} pada $n = 2^k$ dan $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil dan k bilangan bulat positif.
- BAB 4** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan mengenai energi graf non-koprima atas grup dihedral D_{2n} , diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Penelitian ini berhasil menentukan rumus umum energi dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} menggunakan matriks *adjacency*. Untuk kasus $n = 2^k$, dengan $k \in \mathbb{Z}^+$, diperoleh

$$EAM(\Gamma_{D_{2(2^k)}}) = 4(2^k - 1).$$

Sedangkan untuk kasus $n = p^k$, dengan p bilangan prima ganjil, diperoleh

$$EAM(\Gamma_{D_{2(p^k)}}) = 2(2p^k - 3).$$

2. Penelitian ini juga berhasil menentukan rumus umum energi dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} menggunakan matriks jumlah derajat. Untuk kasus $n = 2^k$, dengan $k \in \mathbb{Z}^+$, diperoleh

$$EDS(\Gamma_{D_{2(2^k)}}) = 16(2^{2k} - 2^{k+1} + 1).$$

Sedangkan untuk kasus $n = p^k$, dengan p bilangan prima ganjil, diperoleh

$$EDS(\Gamma_{D_{2(p^k)}}) = 4(2p^{2k} - 6p^k + 5).$$

3. Selain itu, penelitian ini berhasil menentukan rumus umum energi dari graf non-koprima pada grup dihedral D_{2n} menggunakan matriks Seidel. Untuk

kasus $n = 2^k$, dengan $k \in \mathbb{Z}^+$, diperoleh

$$ES(\Gamma_{D_{2(2^k)}}) = 4(2^k - 1).$$

Untuk kasus $n = p^k$, dengan p bilangan prima ganjil, diperoleh

$$ES(\Gamma_{D_{2(p^k)}}) = 4(p^k - 1).$$

4.2. Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diperoleh, terdapat beberapa saran untuk penelitian selanjutnya sebagai berikut.

1. Penelitian mengenai energi graf non-koprime atas grup dihedral D_{2n} dapat dikembangkan dengan menggunakan representasi matriks lainnya, seperti matriks Laplacian, matriks signless Laplacian, matriks distance, matriks Randic, maupun matriks normalized Laplacian. Penggunaan representasi matriks yang berbeda memungkinkan diperolehnya karakteristik spektral lain yang dapat memperluas kajian teori graf spektral pada graf non-koprime.
2. Penelitian selanjutnya juga dapat dilakukan pada graf non-koprime atas grup dihedral D_{2n} dengan bentuk n yang lainnya, seperti $n = pq$, $n = p^k q^m$, dengan p dan q merupakan bilangan prima berbeda, atau n berupa bilangan komposit lainnya. Kajian pada bentuk tersebut diharapkan dapat menghasilkan pola energi graf yang lebih umum dan memberikan pemahaman yang lebih luas mengenai hubungan antara struktur grup dihedral dan sifat spektral graf non-koprime yang dihasilkan.
3. Selain membahas energi graf, penelitian selanjutnya juga dapat mengkaji sifat spektral lainnya dari graf non-koprime atas grup dihedral, seperti radius

spektral, polinom karakteristik, multiplisitas nilai eigen, serta hubungan antara spektrum graf dan sifat aljabar dari grup yang mendasarinya.



DAFTAR PUSTAKA

- Asmarani, E. Y., Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021). The power graph of a dihedral group. *Eigen Mathematics Journal*, 4(2):81–85, DOI: 10.29303/emj.v4i2.117.
- Balakrishnan, R. (2004). The energy of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 387:287–295, DOI: 10.1016/j.laa.2004.02.038.
- Gallian, J. A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra*. Cengage Learning, Boston, 7 edition.
- Karang, G. Y., Wardhana, I. G. A. W., Alimon, N. I., & Sarmin, N. H. (2025). Energy and degree sum energy of non-coprime graphs on dihedral groups. *J. Indones. Math. Soc.*, 31, No. 01:1–11.
- Munandar, A. (2022). *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*. Sleman : Deepublish (CV Budi Utama).
- Munandar, A. (2023). *Aljabar Linear Elementer*. Deepublish, Yogyakarta.
- O'Neill, B. (2019). The double-constant matrix, centering matrix and equicorrelation matrix: Theory and applications. Revised 2020.
- Sciriha, I. & Collins, L. (2019). Two-graphs and nssds: An algebraic approach. *Discrete Applied Mathematics*, 266:92–102, DOI: 10.1016/j.dam.2018.05.003.

Shofiyulloh, M., Munandar, A., & Wardati, K. (2024). Graf prima koprima atas grup dihedral. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)*, 16(2):133–146, ISSN: 2085–1456. ISSN Online: 2550-0422.

Silvester, J. R. (2000). Determinants of block matrices. *The Mathematical Gazette*, 84(501):460–467, DOI: 10.2307/3620776.

