

SKRIPSI

**BEBERAPA SIFAT MODUL TEREDUKSI DAN
REPRESENTASI GRAF ANNIHILATOR**



NISRINA RAHADATUL 'AISY

22106010016

**STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2026

BEBERAPA SIFAT MODUL TEREDUKSI DAN REPRESENTASI GRAF ANNIHILATOR

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



diajukan oleh

NISRINA RAHADATUL 'AISY

22106010016

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2026



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Nisrina Rahadatul 'Aisy

NIM : 22106010016

Judul Skripsi : Beberapa Sifat Modul Tereduksi dan Representasi Graf Annihilator

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 4 Mei 2026

Pembimbing

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

NIP. 19660731 200003 2 001



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1121/Un.02/DST/PP.00.9/06/2026

Tugas Akhir dengan judul : Beberapa Sifat Modul Tereduksi dan Representasi Graf Annihilator

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : NISRINA RAHADATUL 'AISY
Nomor Induk Mahasiswa : 22106010016
Telah diujikan pada : Rabu, 13 Mei 2026
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

SIGNED

Valid ID: 6a1e94339aed3



Penguji I

Arif Munandar, M.Sc.

SIGNED

Valid ID: 6a194e6e17256



Penguji II

Aulia Khifah Futhona, M.Sc.

SIGNED

Valid ID: 6a195c5105af6



Yogyakarta, 13 Mei 2026

UIN Sunan Kalijaga

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

SIGNED

Valid ID: 6a1e9433965d8

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Nisrina Rahadatul 'Aisy

NIM : 22106010016

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 4 Mei 2026



Nisrina Rahadatul 'Aisy
NIM. 22106010016

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN



Skripsi ini penulis persembahkan kepada
orang tua penulis dan almamater UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

HALAMAN MOTTO



Allah mewujudkan setiap doa,
harap, dan impian yang dilangitkan hambaNya.

*“It wasn’t easy, but it wasn’t bad. In this complicated world,
I laughed for a moment at one small thing.”*

(Cheers to Youth — Seventeen)

Selesaikan apa yang telah kamu mulai.

PRAKATA

Alhamdulillah, teriring rasa syukur kehadiran Allah SWT yang telah menganugerahkan rahmat, taufiq, hidayah, serta inayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyusun skripsi ini. Adapun judul dari skripsi ini yaitu “Beberapa Sifat Modul Tereduksi dan Representasi Graf Annihilator”. Penyusunan skripsi ini dilakukan sebagai salah satu prasyarat meraih gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa selama penyusunan skripsi ini penulis mengalami banyak kendala dan juga hambatan. Akan tetapi, sebab adanya semangat, dorongan, bimbingan, dan juga pencerahan yang diberikan oleh banyak pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak dan ibu dari penulis yang selalu melantunkan beragam doa dan *support* dalam setiap proses penulis menempuh pendidikan hingga pada akhirnya dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sekaligus Dosen Pembimbing Akademik dan Dosen Pembimbing Skripsi dari penulis yang banyak meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga untuk membimbing penulis selama akhir masa studi penulis.
3. Ibu Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta beserta seluruh dosen Matematika yang telah memberikan ilmu selama perkuliahan

sehingga penulis dapat memahami dan menyusun hasil belajar tersebut dalam bentuk skripsi ini.

4. Segenap staff akademik baik program studi maupun fakultas yang turut membantu pengurusan administrasi akademik penulis.
5. Kakak dari penulis yang selalu memberikan dukungan dan bantuan dalam setiap proses pembelajaran penulis.
6. Grup *Kpop* Seventeen yang kebersamai penulis selama akhir masa studi melalui karya-karyanya, serta menginspirasi penulis untuk selalu berusaha dan bertumbuh.
7. Teman-teman KKN Kelompok 184 yang seringkali memotivasi dan menyemangati penulis selama masa penulisan skripsi.
8. Teman terdekat penulis yang turut kebersamai, membantu, dan saling memberi pencerahan kepada penulis sejak awal hingga akhir masa studi.
9. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu, baik secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Besar harapan penulis apabila skripsi ini dapat menyalurkan manfaat bagi setiap orang yang membacanya. Penulis juga mengharapkan kritik dan saran yang dapat membantu pengembangan skripsi penulis.

Yogyakarta, 4 Mei 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR LAMBANG	xii
INTISARI	xiii
ABSTRACT	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	4
1.3. Rumusan Masalah	4
1.4. Tujuan Penelitian	4
1.5. Manfaat Penelitian	5
1.6. Tinjauan Pustaka	5
1.7. Metode Penelitian	7
1.8. Sistematika Penulisan	9
II DASAR TEORI	10
2.1. Grup	10

2.2. Ring	13
2.3. Ideal	20
2.4. Modul	23
2.5. Graf	30
III RING TEREDUKSI DAN MODUL TEREDUKSI	35
3.1. Ring Tereduksi	35
3.2. Modul Tereduksi	39
IV REPRESENTASI MODUL KE GRAF TAK BERARAH	52
4.1. Graf Annihilator pada Modul Tereduksi	52
4.2. Karakterisasi Graf Annihilator pada Modul Tereduksi	62
V PENUTUP	69
5.1. Kesimpulan	69
5.2. Saran	70
DAFTAR PUSTAKA	71
Curriculum Vitae	76

DAFTAR GAMBAR

1.1	Skema Penelitian	8
2.1	Graf G	30
4.1	Graf $AG(\mathbb{Z}_6)$	54
4.2	Graf $AG(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$	56
4.3	Graf $AG(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$	59
4.4	Graf $AG(11\mathbb{Z}_{121})$	62

DAFTAR LAMBANG

$x \in A$	: x anggota A
$x \notin A$	: x bukan anggota A
$\exists$	: terdapat
$\forall$	: untuk setiap
$A \subseteq X$	: A himpunan bagian (<i>subset</i>) atau sama dengan X
$A \not\subseteq X$	: A bukan himpunan bagian (<i>subset</i>) X
$\mathbb{Z}$	: himpunan semua bilangan bulat
$n\mathbb{Z}$	: himpunan semua bilangan bulat kelipatan n
$\mathbb{Z}_n$	: himpunan semua bilangan bulat modulo n
$\mathbb{R}$	: himpunan semua bilangan real
$\mathbb{N}$	: himpunan semua bilangan asli
■	: akhir suatu bukti
$A \cap B$	: A beririsan dengan B
$A \cup B$	: A gabungan B
$A \mapsto B$	: A dipetakan ke B
$p \Rightarrow q$	: jika p maka q
M_R	: modul kanan M atas ring R
$T(M_R)$	: himpunan semua elemen torsi dari modul M atas ring R
$\text{Ann}_R(m)$	: annihilator elemen dari m
$[Rx : M_R]$	: residual dari Rx yang dibangun oleh M_R
$AG(M_R)$	: graf annihilator pada modul M_R
$a \sim b$	: a terhubung dengan b

INTISARI

BEBERAPA SIFAT MODUL TEREDUKSI DAN REPRESENTASI GRAF

ANNIHILATOR

Oleh

NISRINA RAHADATUL 'AISY

22106010016

Diberikan M_R modul atas ring R dengan elemen satuan. Modul M_R didefinisikan sebagai modul tereduksi jika dan hanya untuk setiap $m \in M_R$ dan $a \in R$ yang berlaku $ma = 0$ mengakibatkan irisan dari himpunan mR dan $M_R a$ menghasilkan *singleton* nol. Modul tereduksi M_R merupakan generalisasi dari ring tereduksi. Modul tereduksi dapat direpresentasikan ke dalam bentuk graf yang disebut dengan graf annihilator. Himpunan titik dari graf annihilator merupakan elemen torsi tak nol dari M_R dimana keterhubungan titik-titik ditentukan dari annihilator dan residual pada modul tereduksi. Penelitian ini tidak hanya membahas terkait definisi modul tereduksi dan representasinya pada graf annihilator, melainkan sifat-sifat yang muncul pada keduanya. Graf annihilator pada modul tereduksi merupakan graf tak berarah. Diberikan beberapa contoh graf annihilator pada modul tereduksi berupa graf tidak lengkap, graf lengkap, dan graf nol (graf yang hanya terdiri dari titik-titik tanpa adanya sisi yang menghubungkan). Representasi graf annihilator yang memuat *cycle* hanya memiliki *girth* 3 atau 4.

Kata kunci : annihilator, elemen torsi, modul tereduksi, residual, graf annihilator.

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF REDUCED MODULE AND ANNIHILATOR GRAPH REPRESENTATION

By

NISRINA RAHADATUL 'AISY

22106010016

Let M_R be a module over a ring R with a unit. A module M_R is defined as a reduced module if and only if, for every $m \in M_R$ and $a \in R$ such that $ma = 0$, the intersection of the sets mR and $M_R a$ is singleton zero. A reduced module M_R is a generalization of a reduced ring. A reduced module can be represented in the form of a graph called the annihilator graph. The set of vertices of the annihilator graph consists of the non-zero torsion elements of M_R , where the connectivity of the vertices is determined by the annihilator and the residuals on the reduced module. This research not only discusses the definition of reduced modules and their representation in the annihilator graph but also the properties that arise in both. The annihilator graph of a reduced module is an undirected graph. Several examples of annihilator graphs of reduced modules are given, including incomplete graphs, complete graphs, and zero graphs (graphs consisting only of vertices with no connecting edges). An annihilator graph representation containing a cycle has a girth of only 3 or 4.

Keyword : annihilator, annihilator graph, reduced module, residual, torsion element.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Aljabar abstrak merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari struktur aljabar (Jayati & Sulaiman, 2018). Struktur aljabar diantaranya yaitu grup, ring, dan modul. Ring merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner (penjumlahan dan perkalian) dan memenuhi aksioma tertentu (Wahyuni et al., 2020). Perbedaan antara struktur ring dan grup berada pada operasi biner yang berlaku. Grup hanya dilengkapi dengan satu operasi biner yakni penjumlahan, sedangkan pada ring dilengkapi dengan dua operasi biner, yakni penjumlahan dan perkalian. Sementara itu, modul merupakan suatu grup komutatif atas ring dengan elemen satuan yang memenuhi suatu operasi dengan definisi tertentu. Modul merupakan generalisasi dari ruang vektor (Wahyuni et al., 2020).

Struktur aljabar dapat direpresentasikan ke dalam bentuk graf (Lestari, 2024). Graf merupakan himpunan yang terdiri dari himpunan titik dan himpunan sisi dengan syarat keterhubungan tertentu (Gross et al., 2019). Representasi struktur aljabar terkhusus modul ke dalam graf berbentuk graf tak berarah dengan sifat-sifat yang berkembang dari definisi dan pembahasan modul (Jarrar, 2024). Layaknya graf pada umumnya, graf hasil representasi modul ke graf memiliki definisi dan karakteristik sesuai modul yang digunakan. Karakteristik dari suatu graf meliputi jarak, diameter, siklus, girth, dan lain sebagainya.

Struktur aljabar yang digunakan pada penelitian ini adalah modul tereduksi-

si. Modul tereduksi merupakan generalisasi dari ring tereduksi. Ring tereduksi terlebih dahulu diperkenalkan dan digeneralisasi oleh (Lee & Zhou, 2004), (Başer & Agayev, 2006) dan (Kyomuhangi & Sseviiri, 2023). Sebarang ring dikatakan tereduksi jika untuk setiap elemen tak nol pada ring tersebut apabila dikuadratkan hasilnya bukan nol (Lee & Zhou, 2004). Definisi ring tereduksi dibatasi pada ring yang bukan daerah integral, karena untuk sebarang daerah integral memenuhi sifat-sifat ring tereduksi. Dari definisi tersebut, diperoleh definisi modul tereduksi yang dikhususkan untuk modul kanan tereduksi (Abdollah et al., 2022). Modul kanan tereduksi memiliki definisi dan sifat-sifat modul secara umum, seperti submodul, annihilator, himpunan elemen torsi, dan lain sebagainya.

Penelitian terkait representasi struktur aljabar khususnya modul ke dalam bentuk graf annihilator pernah diteliti pada (Abdollah et al., 2022). Abdollah et al. pada penelitiannya membandingkan graf torsi dan graf annihilator pada modul multiplikasi tereduksi. Graf torsi pada modul multiplikasi tereduksi merupakan generalisasi dari graf pembagi nol atas ring ke modul. Graf pembagi nol terlebih dahulu diperkenalkan oleh (Beck, 1988) kemudian dikembangkan oleh para peneliti pada (Anderson & Lewis, 2016), (Anderson & LaGrange, 2016), dan (Anderson & McClurkin, 2020). Graf pembagi nol atas ring menggunakan himpunan pembagi nol tak nol sebagai himpunan titiknya dimana keterhubungan antar titik muncul apabila perkalian kedua elemen pada himpunan titik tersebut menghasilkan nol (Anderson & Lewis, 2016). Pada graf torsi, digunakan himpunan elemen torsi tak nol sebagai himpunan titik dimana syarat keterhubungan antar titik pada graf ini sama dengan syarat keterhubungan antar titik pada graf pembagi nol (Abdollah et al., 2022). Sedangkan untuk graf annihilator menggunakan himpunan elemen torsi tak nol sebagai himpunan titik dimana annihilator dan residual berperan dalam menentukan

keterhubungan antar elemen pada himpunan titiknya (Abdollah et al., 2022). Perbandingan antara graf torsi dan graf annihilator pada modul multiplikasi tereduksi yang diteliti oleh Abdollah et al. menghasilkan sifat-sifat dan karakteristik dari masing-masing graf tersebut, seperti siklus dan girth.

Abdollah et al., 2022 menggunakan modul multiplikasi yang tereduksi untuk direpresentasikan ke dalam bentuk graf. Modul multiplikasi sendiri merupakan submodul yang terbentuk dari perkalian suatu ideal dengan suatu modul (Tolooei, 2020). Modul multiplikasi yang dikaji pertama kali pada (Barnard, 1981) membuka jalan untuk dikembangkannya sifat-sifat terkait modul multiplikasi seperti pada (Tavallae & Mahtabi, 2017), (Tolooei, 2020), dan (Alsuraiheed & Bavula, 2021). Adapun maksud modul tereduksi yaitu apabila irisan dari himpunan mR dan Ma hanya menghasilkan *singleton* nol, untuk setiap elemen a di ring R dan elemen m di modul M (Abdollah et al., 2022). Adanya modul tereduksi yang tidak memenuhi definisi multiplikasi menunjukkan bahwa modul tereduksi dan modul multiplikasi dapat diteliti secara individu.

Berdasarkan uraian hasil penelitian-penelitian terkait representasi modul ke graf, hal tersebut melatarbelakangi dilakukannya penelitian skripsi ini yaitu menyelidiki beberapa sifat dari modul tereduksi dan representasinya ke dalam graf annihilator. Skripsi ini memperkenalkan sifat-sifat umum yang tidak hanya dimiliki oleh graf annihilator pada modul multiplikasi tereduksi, tetapi juga dimiliki oleh graf annihilator pada modul tereduksi. Selain itu, skripsi ini akan membahas struktur dan karakteristik terkait graf annihilator pada modul tereduksi.

1.2. Batasan Masalah

Penjabaran sifat-sifat ring tereduksi dan modul tereduksi dalam skripsi ini dibatasi pada dasar-dasar dari ring tereduksi dan modul tereduksi serta sifat-sifat sederhana yang dapat dikembangkan ke representasi bentuk graf. Selain itu, pembahasan graf annihilator pada modul tereduksi dibatasi pada modul tereduksi atas suatu ring, dimana tidak dikhususkan ring komutatif. Pembahasan antara modul tereduksi dan representasinya ke dalam graf annihilator tidak melibatkan kasus spesial yang membutuhkan analisis lebih lanjut.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana generalisasi modul tereduksi dari ring tereduksi?
2. Bagaimana sifat-sifat dari modul tereduksi?
3. Bagaimana bentuk representasi modul tereduksi ke dalam graf annihilator?
4. Bagaimana karakterisasi dari graf annihilator pada modul tereduksi?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan disusunnya penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari generalisasi modul tereduksi dari ring tereduksi.
2. Mempelajari sifat-sifat dari modul tereduksi.
3. Mempelajari bentuk representasi modul tereduksi ke dalam graf annihilator.
4. Mempelajari karakterisasi dari graf annihilator pada modul tereduksi.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman tentang generalisasi modul tereduksi dari ring tereduksi.
2. Memberikan pemahaman tentang sifat-sifat dari modul tereduksi.
3. Memberikan pemahaman terkait bentuk representasi modul tereduksi ke dalam graf annihilator.
4. Memberikan pemahaman mengenai karakterisasi dari graf annihilator pada modul tereduksi.

1.6. Tinjauan Pustaka

Acuan yang digunakan penulis dalam penulisan skripsi ini bersumber dari beberapa artikel jurnal baik internasional maupun nasional dengan topik yang terkait. Beberapa diantaranya artikel yang diterbitkan dalam 10 tahun terakhir. Adapun artikel dengan masa terbit lebih dari 10 tahun tetap digunakan penulis untuk dasar penulisan suatu definisi ataupun teorema terkait.

Artikel Abdollah et al. (2022) digunakan penulis sebagai acuan utama dalam skripsi ini. Artikel yang membahas perbedaan graf torsi dan graf annihilator pada modul multiplikasi tereduksi tersebut memberikan gambaran terkait modul tereduksi yang dapat direpresentasikan pada graf annihilator. Selain itu, Abdollah et al. (2022) juga menyampaikan bahwa pengertian modul multiplikasi tereduksi merupakan modul multiplikasi yang memenuhi syarat tereduksi, sehingga beberapa sifat pada modul multiplikasi tereduksi juga ditemukan pada modul tereduksi.

Artikel Jarrar (2024) yang membahas generalisasi graf torsi dari graf pembagian nol pada suatu modul digunakan penulis sebagai referensi pendukung dalam skripsi ini. Selain proses generalisasi, Jarrar (2024) menyampaikan bahwa graf torsi pada suatu ring dapat diperluas menjadi graf torsi pada suatu modul. Hal tersebut mendorong dilakukannya hal yang sama pada graf annihilator, karena pembentukan graf annihilator pada modul memiliki prinsip yang sama dengan pembentukan graf torsi pada modul.

Artikel Kyomuhangi & Ssevviiri (2023) yang membahas generalisasi pada modul tereduksi digunakan penulis sebagai referensi pendukung selanjutnya. Kyomuhangi & Ssevviiri (2023) menjelaskan sifat-sifat ring tereduksi- a dan modul tereduksi- a yang muncul ketika akan dilakukan generalisasi. Namun, tereduksi yang dimaksud pada artikel tersebut yaitu a -tereduksi. Jenis a -tereduksi ini memerlukan syarat tambahan dalam proses generalisasi (Kyomuhangi & Ssevviiri, 2023). Oleh karenanya, penelitian skripsi ini terfokus untuk membahas terkait modul tereduksi tanpa a .

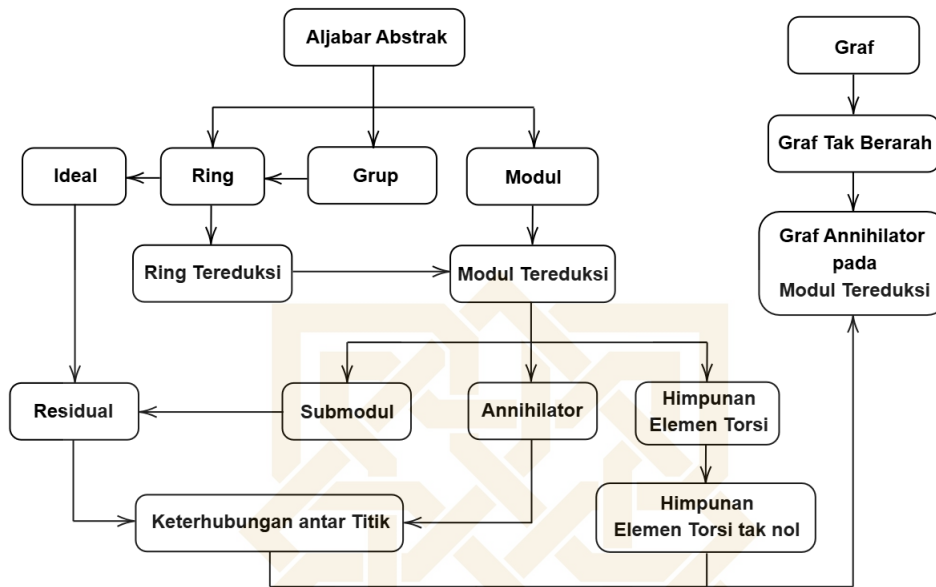
Artikel Nozari & Payrovi (2021) yang membahas graf annihilator pada modul atas ring komutatif digunakan penulis sebagai referensi tambahan pada skripsi ini. Nozari & Payrovi (2021) menguraikan sifat-sifat dari graf annihilator yang merepresentasikan modul. Hal tersebut tidak jauh berbeda dengan yang diteliti pada skripsi ini. Perbedaan antara artikel tersebut dengan skripsi ini terletak pada modul yang digunakan dalam representasi graf. Nozari & Payrovi (2021) menggunakan modul atas ring komutatif dengan elemen satuan tak nol, sedangkan pada skripsi ini digunakan modul tereduksi atas sebarang ring. Kedua modul tersebut dapat menghasilkan sifat serupa ketika direpresentasikan dalam graf annihilator, sehingga artikel tersebut sebagai acuan penulis dalam menjabarkan sifat-sifat terkait graf

annihilator pada modul tereduksi.

Artikel Anderson & McClurkin (2020) yang menjelaskan sifat-sifat yang muncul pada graf pembagi nol dan graf annihilator pada ring komutatif dengan elemen satuan tak nol merupakan referensi pendukung selanjutnya yang digunakan penulis. Berbeda dengan penelitian skripsi ini, Anderson & McClurkin (2020) menggunakan himpunan pembagi nol tak nol sebagai himpunan titik pada graf annihilator, sementara pada skripsi ini menggunakan himpunan elemen torsi tak nol. Adapun syarat keterhubungan antar titik dalam kedua graf tersebut memiliki kesamaan.

1.7. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode studi kepustakaan. Data yang digunakan dalam penelitian ini berupa buku dan artikel jurnal berreputasi, baik nasional maupun internasional, terkait topik penelitian, yaitu konsep dasar grup, ring, ideal, modul dan graf, generalisasi ring tereduksi menuju modul tereduksi, serta representasi modul tereduksi ke dalam graf annihilator. Pada penelitian skripsi ini digunakan pula pendekatan induksi-deduksi untuk memudahkan pemahaman terkait sifat-sifat atau teorema yang dibahas pada skripsi ini. Pendekatan induksi yang dimaksud yakni pengambilan contoh sebagai ilustrasi diperolehnya suatu sifat atau teorema, sedangkan pendekatan deduksi menggunakan hasil teorema ataupun sifat untuk memperoleh suatu contoh (Wardati & Riyanto, 2019). Adapun lebih lengkap gambaran penelitian ini tertera pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Skema Penelitian

Gambar 1.1 menunjukkan skema penelitian yang digunakan dalam penelitian ini. Proses penelitian dimulai dengan pembahasan terkait penjabaran konsep dasar aljabar abstrak dan konsep dasar graf. Penjabaran konsep dasar aljabar abstrak pada penelitian ini meliputi grup, ring, serta modul. Dari pembahasan ring dilanjutkan penjelasan terkait ideal dan juga ring tereduksi. Proses generalisasi ring tereduksi ini disampaikan pada pembahasan modul tereduksi. Pembahasan mengenai modul tereduksi memunculkan sifat-sifat terkait yang nantinya dapat direpresentasikan pada graf annihilator.

Selain sifat-sifat terkait modul tereduksi, diperoleh pula struktur dari modul tereduksi seperti submodul, annihilator, dan himpunan elemen torsi. Submodul dengan ideal akan membentuk struktur baru yakni residual. Residual dan annihilator nantinya berkolaborasi dalam proses representasi modul tereduksi ke graf annihilator. Keduanya berperan sebagai penentu keterhubungan antar titik dalam graf annihilator pada modul tereduksi. Adapun himpunan semua ele-

men torsi tak nol yang ada pada modul tereduksi berperan sebagai himpunan titik pada graf tersebut. Proses representasi modul tereduksi ke graf annihilator berupa graf yang berjenis graf tak berarah. Pembahasan graf annihilator pada modul tereduksi memberikan beberapa sifat-sifat yang menjabarkan karakteristik dari graf annihilator pada modul tereduksi.

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi lima bab, yaitu sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini memuat latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini menjabarkan konsep dasar dari grup, ring, ideal, modul, dan graf.
- BAB 3** : Bab ini menguraikan proses generalisasi modul tereduksi dari ring tereduksi.
- BAB 4** : Bab ini membahas bentuk representasi graf annihilator dan karakteristiknya pada modul tereduksi.
- BAB 5** : Bab ini berisikan kesimpulan dari penelitian dan saran penulis terhadap pengembangan penelitian.

BAB V

PENUTUP

Bab penutup ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya. Pada bab ini disampaikan kesimpulan secara ringkas terkait modul tereduksi dan representasinya pada graf annihilator. Sedangkan saran pada penelitian ini dimaksudkan untuk saran penelitian yang dapat dilakukan di masa mendatang.

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan pemaparan materi terkait ring tereduksi, modul tereduksi, serta graf annihilator pada modul tereduksi, penelitian ini secara induktif memberikan hasil berupa penjabaran terkait modul tereduksi yang diperoleh dari proses generalisasi ring tereduksi. Modul tereduksi M_R merupakan modul yang memenuhi syarat tereduksi (apabila $ma = 0$, maka irisan antara himpunan mR dan $M_R a$ menghasilkan *singleton* nol untuk setiap $m \in M_R$ dan $a \in R$). Selain itu, terinspirasi dari beberapa contoh modul tereduksi, diperoleh beberapa sifat yang sudah lengkap dibuktikan antara lain:

- (1) Modul $p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n}$ merupakan modul tereduksi atas $\mathbb{Z}_{p^n}$ untuk sebarang bilangan prima p dan bilangan bulat non negatif n .
- (2) Jika $ma = 0$ maka $mRa = \{0\}$ dan jika $ma^2 = 0$ maka $ma = 0$ untuk setiap $m \in M_R$ dan $a \in R$.
- (3) Diberikan $\mu : R \mapsto S$ homomorfisma ring dan modul kanan M_R dan M_S ,

maka kondisi berikut berlaku:

- (a) Jika M_S modul tereduksi, maka M_R modul tereduksi.
- (b) Jika μ merupakan epimorfisma, maka berlaku jika M_R modul tereduksi, maka M_S tereduksi.

Adapun terkait representasi modul tereduksi ke dalam graf annihilator $AG(M_R)$.

Graf annihilator diperoleh dengan bentuk graf tak berarah yang memiliki himpunan elemen torsi tak nol ($T(M_R) \setminus \{0\}$) sebagai himpunan titik. Keterhubungan pada graf annihilator pada modul tereduksi diperoleh dari struktur annihilator dan residual pada modul tereduksi. Dua elemen torsi tak nol x dan y saling terhubung jika dan hanya jika $Ann_R([x : M_R]y) \neq Ann_R(x) \cup Ann_R(y)$ atau $Ann_R([y : M_R]x) \neq Ann_R(x) \cup Ann_R(y)$ dimana $[x : M_R] = [Rx : M_R] = \{r \in R \mid rM_R \subseteq Rx\}$. Berdasarkan definisi tersebut, dapat ditemukan beberapa sifat terkait graf annihilator pada modul tereduksi sebagaimana berikut:

- (1) Jika $[x : M_R]y = \{0\}$ maka $(Rx \setminus \{0\}), (Ry \setminus \{0\}) \subseteq T(M_R) \setminus \{0\}$ serta $(Rx \setminus \{0\})$ dan $(Ry \setminus \{0\})$ terhubung penuh pada $AG(M_R)$.
- (2) Asumsikan $[x : M_R]x = \{0\}$ dengan $x \in T(M_R) \setminus \{0\}$ maka $[x : M_R]M_R = \{0\}$ sedemikian sehingga x terhubung untuk setiap elemen $T(M_R) \setminus \{0\}$.
- (3) Diberikan modul M_R dan R ring komutatif dengan elemen satuan. Jika $AG(M_R)$ memuat *cycle* maka hanya memiliki *girth* 3 atau 4.

5.2. Saran

Saran untuk dilakukannya penelitian selanjutnya adalah terkait karakterisasi graf annihilator pada modul tereduksi yang dapat diselidiki secara lebih detail. Selain itu, penelitian terkait representasi modul tereduksi pada penelitian ini masih

terbatas pada graf annihilator. Hal ini memberikan celah bahwa modul tereduksi dapat dikembangkan pada graf torsi. Perbedaan antara graf torsi dan graf annihilator terletak pada ketentuan keterhubungan antar titik pada graf tersebut. Adapun himpunan titik baik pada graf torsi maupun graf annihilator juga menggunakan himpunan elemen torsi tak nol.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdollah, Z., Rad, P. M., Ghalandarzadeh, S., & Shahriari, S. (2022). On torsion elements and their annihilators. *Journal of Algebra*, 610:199–222, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2022.07.009.
- Abdussakir (2017). Radius, diameter, multiplisitas sikel, dan dimensi metrik graf komuting dari grup dihedral. *Jurnal Matematika “Mantik”*, 3:1–4, DOI: 10.15642/mantik.2017.3.1.1–4.
- Agayev, N., Halicioglu, S., & Harmanci, A. (2009). On reduced modules. *Community Faculty Science University Ankara*, 58:9–16, dspace.ankara.edu.tr/server/api/core/bitstreams/b2ae1eec-1a5b-4951-92ba-27c259fecb7b/content.
- Alsuraiheed, T. & Bavula, V. (2021). Criteria for a direct sum of modules to be a multiplication module over noncommutative rings. *Journal of Algebra*, 584:69–88, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2021.05.006.
- Anderson, D. F. & LaGrange, J. D. (2016). Some remarks on the compressed zero-divisor graph. *Journal of Algebra*, 447:297–321, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2015.08.021.
- Anderson, D. F. & Lewis, E. F. (2016). A general theory of zero-divisor graphs over a commutative ring. *International Electronic Journal of Algebra*, 20:111–135, www.iejg.net/files/papers/volume-20/7-V20-2016.pdf.

- Anderson, D. F. & McClurkin, G. (2020). Generalizations of the zero-divisor graph. *International Electronic Journal of Algebra*, 27:237–262, DOI: 10.24330/iej.663079.
- Başer, M. & Agayev, N. (2006). On reduced and semicommutative modules. *Turkish Journal of Mathematics*, 30:285–291, journals.tubitak.gov.tr/cgi/viewcontent.cgi?article=2667&context=math.
- Barnard, A. (1981). Multiplication module. *Journal of Algebra*, 71:174–178, DOI: 10.1016/0021-8693(81)90112-5.
- Beck, I. (1988). Coloring of commutative rings. *Journal of Algebra*, 116:208–226, DOI: 10.1016/0021-8693(88)90202-5.
- Bhattacharya, P., Jain, S., & Nagpaul, S. (1995). *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press.
- Blyth, T. (1990). *Module theory : An approach to linear algebra*. Clarendon Press, Oxford University Press.
- Gross, J. L., Yellen, J., & Anderson, M. (2019). *Graph Theory and Its Applications*. Boca Raton, CRC Press.
- Ibrahim & Mussafi, N. S. M. (2013). *Pengantar Kombinatorika dan Teori Graf*. Graha Ilmu.
- Jarrar, M. (2024). A generalization of torsion graph for modules. *Journal of Algebra*, 15:469–476, DOI: 10.4236/am.2024.157029.
- Jayati, S. & Sulaiman, R. (2018). Bp-aljabar. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 6:8–13, ejournal.unesa.ac.id/index.php/mathunesa/article/view/25307/23192.

- Kyomuhangi, A. & Sseviiri, D. (2023). Generalised reduced modules. *Rendiconti del Circolo Matematico Palermo, Serie II*, 72:421–431, DOI: 10.1007/s12215-021-00686-8.
- Lee, T.-K. & Zhou, Y. (2004). Reduced modules. DOI: 10.1201/9780824750817.ch29.
- Lestari, S. T. (2024). *Struktur Aljabar dan Sifat-Sifat Kombinatorik dari Graf Unit di Gelanggang Bilangan Bulat Modulo dengan Orde Spesifik*. Universitas Mataram, eprints.unram.ac.id/48479/2/Skripsi%20Sahin%20Two%20Lestari_G1D021011%20fixed.pdf.
- Malik, D., Mordeson, J. M., & Sen, M. (1997). *Fundamentals of Abstract Algebra*. The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Maspurin, A. (2007). *Modul Tereduksi dan Semikomutatif*. Malang : Universitas Brawijaya, repository.ub.ac.id/151667/1/050702330.pdf.
- Matlis, E. (1983). The minimal prime spectrum of a reduced ring. *Illinois Journal of Mathematics*, 27, projecteuclid.org/journals/illinois-journal-of-mathematics/volume-27/issue-3/The-minimal-prime-spectrum-of-a-reduced-ring/10.1215/ijm/1256046365.pdf.
- Nozari, K. & Payrovi, S. (2021). The annihilator graph for modules over commutative rings. *Journal of Algebraic Systems*, 9:1–12, DOI: 10.22044/jas.2020.9194.1448.MSC(2010).
- Tavallaee, H. & Mahtabi, R. (2017). Some properties of multiplication modules. *J. Indones. Math. Soc.*, 23:47–53, DOI: 10.22342/jims.23.2.276.47–53.

Tolooei, Y. (2020). Multiplication modules that are finitely generated. *Journal of Algebraic System*, 8:1–5, jas.shahroodut.ac.ir/article_1761_b43d2dbad078483b14ce4c8a0a2df8fc.pdf.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2020). *Teori Ring dan Modul*. Sleman : Gadjah Mada University Press.

Wardati, K. & Riyanto, Z. (2019). *Terapan Grup Matriks atas Ring Komutatif Pada Protokol Kunci*. Graha Ilmu.