SKRIPSI

PRESERVASI STRUKTUR SEMI-ANALITIK DI BAWAH OPERATOR INTEGRAL BERPARAMETER



MUHAMAD RIANANDA FADHILAH
22104040060

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

2026

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PRESERVASI STRUKTUR SEMI-ANALITIK DI BAWAH OPERATOR INTEGRAL BERPARAMETER

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Pendidikan Matematika

Diajukan Oleh:

MUHAMAD RIANANDA FADHILAH

22104040060

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

2026

HALAMAN PENGESAHAN

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 513056 Fax. (0274) 586117 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-3081/Un.02/DT/PP.00.9/09/2026

Tugas Akhir dengan judul : PRESERVASI STRUKTUR SEMI-ANALITIK DI BAWAH OPERATOR INTEGRAL BERPARAMETER

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : MUHAMAD RIANANDA FADHILAH
Nomor Induk Mahasiswa : 22104040060
Telah diujikan pada : Rabu, 19 Agustus 2026
Nilai ujian Tugas Akhir : A-

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Burhanuddin Latif, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6a9fbba5ead0

Penguji I

Dr. Mulin Nu'man, S.Pd., M.Pd.
SIGNED

Valid ID: 6a9e840ba46e6

Penguji II

Wed Giyarti, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6a90badc70c9

Yogyakarta, 19 Agustus 2026
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan

Prof. Dr. Sigit Purnama, S.Pd.I., M.Pd.
SIGNED

Valid ID: 6a810f708ef33

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

SURAT PERSETUJUAN TUGAS AKHIR

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga **FM-STUINSK-BM-05-01/R0**

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI

Hal : Persetujuan Skripsi
Lamp : -

Kepada Yth.
Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
Di Yogyakarta

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi, serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Muhamad Riananda Fadhilah
NIM : 22104040060
Judul Skripsi : Preservasi Struktural Semi-Analitik di Bawah Operator Integral Berparameter

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Pendidikan Matematika.

Dengan ini, kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqosyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Yogyakarta, 11 Agustus 2026
Pembimbing

Burhanuddin Latif, M.Si
NIP. 19920404 201903 1 010

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Muhamad Riananda Fadhilah
NIM	: 22104040060
Prodi	: Pendidikan Matematika
Fakultas	: Ilmu Tarbiyah dan Keguruan

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Preservasi Struktur Semi-Analitik di Bawah Operator Integral Berparameter" merupakan hasil penelitian saya sendiri, tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 12 Agustus 2026
Yang menyatakan,



Muhamad Riananda Fadhilah
NIM 22104040060

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PRESERVASI STRUKTUR SEMI-ANALITIK DI BAWAH OPERATOR INTEGRAL BERPARAMETER

Muhamad Riananda Fadhilah

22104040060

ABSTRAK

Penelitian ini mengkaji preservasi struktur semi-analitik di bawah operator integral berparameter. Penelitian bertujuan menganalisis hubungan regularitas kernel dengan sifat fungsi hasil transformasi, keterukuran dan integrabilitas fungsi hasil transformasi, serta kondisi yang menjamin preservasi struktur semi-analitik. Penelitian ini merupakan penelitian matematika murni dengan pendekatan studi literatur dan analisis deduktif berdasarkan teori ukuran, integral Lebesgue, analisis regularitas fungsi, dan teori fungsi semi-analitik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa keterukuran kernel dan fungsi masukan serta kondisi integrabilitas yang sesuai menjamin fungsi hasil transformasi terukur dan integrabel. Regularitas kernel terhadap variabel keluaran dan parameter, disertai kondisi dominasi terhadap turunannya, menjamin kekontinuan, diferensiabilitas, dan analitisitas riil fungsi hasil transformasi. Secara khusus, estimasi

$$| \partial_z^{\alpha} K(z,y) f(y) | \leq C_Q G_Q(y) \frac{\alpha!}{R_Q^{|\alpha|}}$$

pada setiap kompak $Q \Subset U$ merupakan kondisi cukup bagi analitisitas. Dengan dekomposisi hingga domain semi-analitik dan representasi lokal fungsi masukan, diperoleh bahwa pada asumsi domain kompak serta regularitas dan dominasi yang sesuai, operator integral berparameter mempertahankan struktur semi-analitik.

Kata Kunci: Operator Integral Berparameter, Fungsi Semi-Analitik, Kernel, Integral Lebesgue, Analitisitas, dan Preservasi Struktur.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PRESERVATION OF SEMI-ANALYTIC STRUCTURE THROUGH PARAMETERIZED INTEGRAL OPERATORS

ABSTRACT

This study investigates the preservation of semi-analytic structure under parameterized integral operators. The study aims to analyze the relationship between kernel regularity and transformed-function properties, the measurability and integrability of transformed functions, and sufficient conditions that guarantee the preservation of semi-analytic structure. This pure mathematical study employs a literature-based and deductive approach grounded in measure theory, Lebesgue integration, function regularity, and semi-analytic function theory. The results show that the measurability of the kernel and input function, together with appropriate integrability conditions, ensures that the transformed function is measurable and integrable. Furthermore, kernel regularity with respect to output variables and parameters, together with suitable domination conditions on its derivatives, guarantees the continuity, differentiability, and real analyticity of the transformed function. In particular, the estimate

$$| \partial_z^{\alpha} K(z,y) f(y) | \leq C_Q G_Q(y) \frac{\alpha!}{R_Q^{|\alpha|}}$$

on every compact $Q \Subset U$ provides a sufficient condition for real analyticity. By using a finite decomposition of the compact semi-analytic domain and local analytic representations of the input function, it is shown that, under appropriate regularity and domination assumptions, the parameterized integral operator preserves the semi-analytic structure

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Keywords: Parameterized Integral Operator, Semi-Analytic Function, Kernel, Lebesgue Integration, Analyticity, Structure Preservation.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

MOTTO

Per Aspera Ad Astra.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan kepada:

Bapak Muhamad Arief Budiansyah dan Ibu Yeti Yuliana,
kedua orang tua saya tercinta.

Kepada Maulana Sulthon Auliya Al-Hafidz, kakak saya.

Kepada Sultan Fauzan Aqila dan Adelia Safira Azizah, adik saya.

Serta kepada:

Almamaterku

Program Studi Pendidikan Matematika

Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Preservasi Struktur Semi-analitik di Bawah Operator Integral Berparameter" dengan baik. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurah kepada Rasulullah Muhammad SAW. Skripsi ini dapat diselesaikan berkat bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Noorhaidi, S.Ag.,M.A., M.Phil., Ph.D. selaku Rektor UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Bapak Prof. Dr. Sigit Purnama, S.Pd.I., M.Pd., selaku Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Bapak Burhanuddin Latif, M.Si., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika sekaligus Dosen Pembimbing Skripsi atas segala waktu, bimbingan, arahan, serta ilmu yang diberikan selama penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Iqbal Ramadani, M.Pd. Selaku dosen pembimbing akademik yang selalu memberikan bimbingan hingga penulis dapat menyelesaikan studi ini.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

5. Seluruh Bapak/Ibu Dosen Program Studi Pendidikan Matematika yang selama ini telah memberikan ilmu yang bermanfaat kepada penulis.
6. Kedua orang tua saya tercinta, Bapak Muhammad Arief Budiansyah dan Ibu Yeti Yuliana. Terima kasih atas pengorbanan, doa tulus, dan mengusahakan segala yang penulis butuhkan dalam menempuh pendidikan.
7. Kepada kakak dan adik saya, Maulana Sulthon Aulia Al-Hafidz, Sultan Fauzan Aqila dan Adelia Safira Azizah yang sudah memberi semangat dan kebahagiaan terbaik.
8. Terakhir, kepada seseorang yang pernah menjadi bagian dari perjalanan hidup penulis, meskipun namanya kini tak dapat lagi disebutkan. Walau pada akhirnya ia tidak berhasil menunggu proses kelulusan penulis hingga akhir, terima kasih atas dukungan, kebersamaan dan pelajaran berharga yang pernah diberikan. Kepergian Anda membuat penulis memahami bahwa setiap orang memiliki masanya, dan setiap masa memiliki orangnya. Luka yang tertinggal bukanlah akhir dari segalanya, melainkan awal dari proses bertumbuh menjadi pribadi yang lebih baik.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, dengan penuh kerendahan hati, peneliti sangat terbuka terhadap segala bentuk masukan, kritik, dan saran yang bersifat membangun.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Semoga setiap bagian dari skripsi ini dapat memberikan manfaat.

Yogyakarta, 11 Agustus 2026
Penulis

Muhamad Riananda Fadhilah
22104040060

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR ISI

HALAMAN PENGESAHAN ..... **iii**
SURAT PERSETUJUAN TUGAS AKHIR ..... **iv**
SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI ..... **v**
ABSTRAK ..... **vi**
ABSTRACT ..... **viii**
MOTTO ..... **x**
HALAMAN PERSEMBAHAN ..... **xi**
KATA PENGANTAR ..... **xii**
DAFTAR ISI ..... **xv**
DAFTAR TABEL ..... **xix**
DAFTAR GAMBAR ..... **xx**
DAFTAR NOTASI ..... **xxi**
BAB I **1**
PENDAHULUAN **1**
1.1. Latar Belakang Masalah 1
1.2. Batasan Masalah 5
1.3. Rumusan Masalah 6
1.4. Tujuan Penelitian 7
1.5. Manfaat Penelitian 7
1.6. Tinjauan Pustaka 8
1.7. Metode Penelitian 16
1.8. Sistematika Penulisan 17

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

BAB II 20

DASAR TEORI 20

2.1. Teori Ukuran 20

2.1.1. Ukuran Luar dan Himpunan Terukur 20

2.1.2. Aljabar-σ 26

2.1.3. Ukuran dan Ruang Ukur Lebesgue 32

2.2. Teori Fungsi Terukur dan Integral Lebesgue 35

2.2.1 Fungsi Terukur 35

2.2.2. Integral Lebesgue 37

2.3. Teori Fungsi Semi-Analitik dan Operator Integral 45

2.3.1. Fungsi Semi-Analitik 45

2.3.2. Operator Integral 57

BAB III 64

KONSTRUKSI OPERATOR INTEGRAL 64

3.1. Penetapan Domain dan Asumsi Kernel 64

3.1.1. Spesifikasi Domain dan Ruang Parameter 65

3.1.2. Landasan Teoretis Kelas Kernel Integral Berparameter 67

3.2. Representasi dan Dekomposisi Fungsi Masukan Semi-Analitik 73

3.2.1. Dekomposisi Sel Domain Y 74

3.2.2. Ekspresi Lokal Graf Fungsi Semi-Analitik 89

3.3. Formulasi Operator Integral Berparameter 92

3.3.1. Konstruksi Pemetaan Transformasi 92

3.3.2. Penegasan Kerangka Ruang Fungsi 97

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

3.4. Sifat-Sifat Dasar dan Keterukuran Operator Terkonstruksi 99
3.4.1. Kesahihan Operator (*Well-Definedness*) 100
3.4.2. Keterukuran Lebesgue Gabungan 101
BAB IV 107
PRESERVASI STRUKTUR SEMI-ANALITIK 107
4.1. Analisis Keterukuran dan Integrabilitas Fungsi Transformasi 109
4.1.1. Keterukuran Fungsi Hasil Transformasi. 110
4.1.2. Integrabilitas Fungsi Hasil Transformasi 112
4.2. Hubungan Regularitas Kernel dan Sifat Fungsi Transformasi 118
4.2.1. Kekontinuan Fungsi Hasil Transformasi 120
4.2.2. Diferensiabilitas Fungsi Transformasi 124
4.2.3. Analitisitas Riil 135
4.3. Preservasi Struktur Semi-Analitik 148
4.3.1. Aplikasi Representasi Lokal 149
4.3.2. Representasi Graf Fungsi Hasil Transformasi .. 155
4.3.3. Teorema Preservasi Struktur Semi-Analitik..... 159
4.3.4. Batas Validitas dan Ketergantungan terhadap Asumsi Preservasi 165
BAB V 169
PENUTUP 169
5.1. Kesimpulan 169
5.2. Saran 172

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR PUSTAKA 173

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR TABEL

Tabel 1. Perbandingan Penelitian…….……..10

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Desain Penelitian…..……..…….17

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR NOTASI

$\mathbb{N}$	:	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	:	Himpunan bilangan riil
$\emptyset$	:	Himpunan kosong
S	:	Himpunan Semesta
$x \in X$	:	Variabel keluaran
$y \in Y$	:	Variabel integrasi
$p \in P$	:	Variabel parameter
X	:	Domain atau ruang yang digunakan
Y	:	Domain integrasi dan domain fungsi masukan
P	:	Ruang parameter
A, B, E	:	Himpunan bagian dari suatu ruang
A^c, E^c	:	Komplemen himpunan A, E
$\mathcal{M}$	:	Aljabar-σ pada suatu himpunan
$\mathcal{B}(S)$	:	Aljabar-σ Borel pada S
$\mathcal{P}(S)$	:	Himpunan kuasa dari S
$\mathcal{L}(S)$	:	Aljabar-σ Lebesgue pada S, apabila $x \subset \mathbb{R}$
$(S, \mathcal{M}, \mu)$	:	Ruang ukur
m^*	:	Ukuran luar Lebesgue
μ	:	Ukuran pada ruang ukur
L^1	:	Ruang fungsi Lebesgue terintegralkan

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

$L^1(Y)$	:	Ruang fungsi Lebesgue terintegralkan pada Y
K	:	Fungsi Kernel
$K(x, y, p)$	:	Nilai kernel pada (x, y, p)
f	:	Fungsi masukan
$f: Y \longrightarrow \mathbb{R}$	:	Pemetaan fungsi masukan dari Y ke $\mathbb{R}$
T	:	Operator integral berparameter
Tf	:	Fungsi hasil transformasi
Ω	:	Partisi dari domain $X \times Y \times P$
C_i	:	Sel ke-i pada dekomposisi Y
χ_{C_i}	:	Fungsi indikator C_i
$f\|_{C_i}$	:	Restriksi fungsi f pada C_i atau pembatasan f ke C_i
α, β	:	Multi-indeks
$\mathcal{F}$	:	Kelas fungsi masukan yang digunakan dalam penelitian
$\mathcal{G}$	:	Ruang atau kelas fungsi hasil transformasi
$\mathcal{K}$	:	Kelas kernel yang memenuhi asumsi penelitian
$\mathcal{K}_{SA}$	:	Kelas kernel semi-analitik
$\mathcal{SA}(Y)$	:	Kelas fungsi semi-analitik
$\partial^\alpha x$	:	Turunan parsial berorde α terhadap variabel x

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

$\partial^{\beta} p$	:	Turunan parsial berorde β terhadap parameter p
$C^1(Y)$	:	Fungsi pada Y yang mempunyai turunan pertama kontinu
$C^{\infty}(Y)$	:	Fungsi pada Y yang mulus (*smooth*)
$C^{\omega}(Y)$	:	Fungsi analitik riil pada Y
$\|Tf\|_{L^1}$	:	Norma L^1 dari transformasi Tf
$\|Tf\|_{L^{\infty}}$	:	Norma L^{∞} dari transformasi Tf
$\|f\|_{L^1}$	:	Norma L^1 dari fungsi f
$\|f\|$	:	Norma dari fungsi f

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Transformasi fungsi merupakan salah satu tema fundamental dalam analisis modern karena memungkinkan pembentukan kelas fungsi baru yang memiliki karakteristik regularitas berbeda dari fungsi asalnya. Dalam konteks ini, operator integral memegang peranan penting sebagai alat konstruksi maupun analisis pada berbagai cabang matematika, termasuk teori operator, teori ukuran, dan persamaan integral. Studi mengenai regularitas hasil transformasi integral telah berkembang menjadi salah satu fondasi penting dalam analisis modern, terutama dalam kaitannya dengan keterukuran, integrabilitas, dan sifat-sifat ruang fungsi (Royden & Fitzpatrick, 2010).

Dalam analisis riil, salah satu pertanyaan yang paling mendasar adalah bagaimana suatu transformasi memengaruhi struktur matematis yang dimiliki oleh fungsi asalnya. Pertanyaan mengenai preservasi kontinuitas, diferensiabilitas, keterukuran, dan integrabilitas telah melahirkan berbagai teori yang menjadi dasar bagi perkembangan analisis fungsional dan teori operator. Secara umum, suatu transformasi memiliki nilai teoritis yang tinggi apabila mampu mempertahankan

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

struktur matematis tertentu yang dimiliki oleh objek yang ditransformasikan (Royden & Fitzpatrick, 2010).

Di sisi lain, perkembangan geometri analitik riil memperkenalkan kelas objek yang lebih kaya dibandingkan fungsi analitik klasik, yaitu himpunan dan fungsi semi-analitik. Konsep semi-analitik berkembang melalui karya-karya Stanisław Łojasiewicz dan menjadi salah satu fondasi penting dalam geometri analitik riil. Secara lokal, himpunan semi-analitik dapat direpresentasikan sebagai kombinasi hingga dari persamaan dan pertidaksamaan analitik sehingga memiliki regularitas geometris yang kuat namun tetap cukup fleksibel untuk menggambarkan fenomena lokal yang kompleks (Lojasiewicz, 1965).

Ketertarikan terhadap struktur semi-analitik tidak hanya muncul karena sifat geometrisnya, tetapi juga karena kestabilannya terhadap berbagai operasi matematis. Penelitian klasik oleh Bierstone & Milman, (1988) menunjukkan bahwa himpunan semi-analitik dan subanalitik memiliki struktur geometris yang sangat kaya serta memainkan peranan penting dalam teori singularitas dan geometri analitik riil modern. Hasil tersebut memperlihatkan bahwa struktur semi-analitik tidak hanya penting sebagai objek geometri, tetapi juga sebagai kerangka konseptual untuk memahami perilaku lokal berbagai kelas fungsi.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Perkembangan penelitian dalam beberapa tahun terakhir menunjukkan bahwa teori semi-analitik dan subanalitik masih menjadi area penelitian yang aktif. Rainer (2024) mendalami mengenai regularitas fungsi analitik riil pada domain subanalitik tertutup dan menunjukkan bahwa hubungan antara regularitas fungsi dan struktur geometri domain masih menyisakan berbagai persoalan teoritis yang menarik. Pada saat yang sama, penelitian lain mengeksplorasi sifat-sifat titik Nash pada himpunan subanalitik dan memperlihatkan bahwa karakterisasi struktur geometri lokal masih menjadi topik yang relevan dalam geometri analitik riil kontemporer (Silva et al., 2024).

Selain itu, penelitian Menegon & Jesus-Almeida (2023) mengkaji trivialitas topologis pada keluarga fungsi di himpunan subanalitik dan ruang analitik kompleks. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa keberadaan parameter memengaruhi struktur topologis keluarga fungsi sehingga analisis terhadap kestabilan sifat-sifat geometris masih menjadi persoalan yang penting

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Dalam konteks penelitian di Indonesia, kajian mengenai operator integral telah dilakukan dari berbagai perspektif analisis fungsional. Susanti (2008) mengkaji operator integral pada ruang fungsi terboboti, Rokhayah (2010) mengembangkan operator integral pada ruang Banach fungsi

berbobot, Munadi (2007) membahas operator linear pada ruang fungsi terintegral Henstock-Bochner, sedangkan Nurmahasasi (2013) meneliti keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Lebesgue. Penelitian-penelitian tersebut menunjukkan bahwa kajian operator integral di Indonesia lebih berfokus pada konstruksi operator, keterbatasan operator, dan sifat fungsi hasil transformasi, tanpa mengkaji preservasi struktur semi-analitik.

Meskipun penelitian mengenai struktur semi-analitik dan operator integral telah berkembang secara signifikan, kedua bidang tersebut umumnya masih dikaji secara terpisah. Penelitian pada geometri analitik riil lebih banyak membahas regularitas fungsi, karakteristik geometri, dan struktur semi-analitik, sedangkan penelitian mengenai operator integral berfokus pada konstruksi operator, keterbatasan operator, serta sifat fungsi hasil transformasi. Berdasarkan studi literatur yang dilakukan, kajian mengenai preservasi struktur semi-analitik pada fungsi yang ditransformasikan melalui operator integral berparameter masih sangat terbatas sehingga masih terbuka peluang untuk dikembangkan.

Salah satu permasalahan yang secara alami muncul dalam penelitian ini adalah apakah operator integral berparameter mampu mempertahankan struktur semi-analitik dari fungsi yang ditransformasikan. Pertanyaan tersebut

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

memiliki signifikansi teoritis karena menghubungkan dua aspek yang berbeda, yaitu regularitas analitik yang biasa diteliti dalam teori operator dan regularitas geometris yang menjadi perhatian utama dalam geometri analitik riil. Oleh sebab itu, penelitian ini diarahkan untuk menelaah hubungan antara transformasi integral dan kestabilan struktur semi-analitik, serta mengidentifikasi kondisi-kondisi yang mendukung preservasi struktur tersebut.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini difokuskan pada penelitian preservasi struktur semi-analitik di bawah operator integral berparameter. Penelitian ini mengintegrasikan teori ukuran, integral Lebesgue, operator integral, dan geometri analitik riil untuk menganalisis hubungan antara regularitas kernel, keterukuran, integrabilitas, dan preservasi struktur semi-analitik. Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori operator integral sekaligus memperluas penelitian terkait fungsi semi-analitik dalam analisis riil.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

1.2. Batasan Masalah

Penelitian ini difokuskan pada analisis preservasi struktur semi-analitik dalam kerangka geometri analitik riil dan analisis riil. Struktur semi-analitik yang digunakan mengikuti pendekatan Łojasiewicz, sedangkan objek yang diteliti dibatasi pada fungsi bernilai riil yang terdefinisi pada

domain kompak di $\mathbb{R}$. Transformasi yang dikaji berupa operator integral berparameter dengan kernel yang memenuhi asumsi regularitas tertentu. Penelitian ini mencakup analisis keterukuran, integrabilitas, serta hubungan antara regularitas kernel dan sifat fungsi hasil transformasi sebagai dasar dalam menjamin kondisi preservasi struktur semi-analitik. Dengan demikian, penelitian ini tidak mencakup pembahasan mengenai struktur subanalitik yang lebih umum, teori singularitas, struktur definabel dalam o-minimal structures, maupun studi aplikasi pada persamaan diferensial, sistem dinamik, dan bidang terapan lainnya.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, kemudian dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana hubungan antara regularitas kernel operator integral berparameter dan sifat-sifat fungsi hasil transformasi yang dibangun dari fungsi semi-analitik?
2. Bagaimana karakteristik keterukuran dan integrabilitas fungsi hasil transformasi yang diperoleh melalui operator integral berparameter?
3. Kondisi-kondisi apa yang menjamin preservasi struktur semi-analitik pada fungsi yang

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

ditransformasikan melalui operator integral berparameter?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui hubungan antara regularitas kernel operator integral berparameter dan sifat-sifat fungsi hasil transformasi yang dibangun dari fungsi semi-analitik.
2. Mempelajari karakteristik keterukuran dan integrabilitas fungsi hasil transformasi yang diperoleh melalui operator integral berparameter.
3. Mengetahui kondisi-kondisi yang menjamin preservasi struktur semi-analitik pada fungsi yang ditransformasikan melalui operator integral berparameter.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menyediakan referensi akademis berbahasa Indonesia yang membahas mengenai hubungan antara regularitas kernel operator integral, sifat integrabilitas fungsi hasil transformasi, dan kestabilan struktur semi-analitik yang dimiliki fungsi tersebut.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2. Penelitian ini dapat menjadi dasar bagi pengembangan studi lanjutan mengenai operator integral yang lebih umum, himpunan subanalitik, maupun struktur definabel dalam geometri modern.
3. Bagi Penulis, penelitian ini memberikan kesempatan bagi penulis untuk memperdalam penguasaan teori analisis riil, operator integral, dan geometri analitik riil, serta meningkatkan kemampuan dalam melakukan pembuktian matematis secara sistematis dan rigor.

1.6. Tinjauan Pustaka

Penelitian mengenai struktur semi-analitik dan subanalitik terus berkembang dalam geometri analitik riil. Rainer (2024) mengkaji regularitas fungsi analitik riil pada domain subanalitik tertutup, Bierstone & Milman (1988) meneliti titik Nash pada himpunan subanalitik, sedangkan Menegon & Jesus-Almeida (2023) membahas keluarga fungsi yang bergantung pada parameter pada himpunan subanalitik. Ketiga penelitian tersebut menunjukkan bahwa kajian mengenai struktur semi-analitik masih berfokus pada aspek regularitas fungsi, karakteristik geometri, dan perilaku objek subanalitik.

Di sisi lain, penelitian mengenai operator integral lebih banyak diarahkan pada analisis sifat-sifat operator pada berbagai ruang fungsi. Susanti (2008) mengkaji operator

integral pada ruang fungsi terboboti, Rokhayah (2010) membahas konstruksi operator integral pada ruang Banach fungsi berbobot, Munadi (2007) mengembangkan operator linear pada ruang fungsi terintegral Henstock-Bochner, sedangkan Nurmahasasi (2013) meneliti keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Lebesgue. Penelitian-penelitian tersebut berfokus pada konstruksi operator, keterbatasan operator, dan sifat fungsi hasil transformasi tanpa mengaitkannya dengan struktur semi-analitik.

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, terlihat bahwa kajian mengenai struktur semi-analitik dan operator integral masih berkembang pada arah yang berbeda. Penelitian di bidang geometri analitik riil berfokus pada regularitas dan karakteristik objek semi-analitik, sedangkan penelitian mengenai operator integral lebih menitikberatkan pada sifat operator dan ruang fungsi. Berdasarkan studi literatur yang dilakukan, kajian mengenai preservasi struktur semi-analitik pada fungsi yang ditransformasikan melalui operator integral berparameter masih sangat terbatas.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Oleh karena itu, penelitian ini diarahkan untuk mengkaji preservasi struktur semi-analitik di bawah operator integral berparameter dengan mengintegrasikan teori ukuran, integral Lebesgue, operator integral, dan geometri analitik riil. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi

terhadap pengembangan teori operator integral sekaligus memperluas kajian mengenai fungsi semi-analitik dalam analisis riil.

Tabel 1. Perbandingan Penelitian

No.	**Nama**	**Tahun**	**Judul**	**Persamaan dengan Penelitian ini**	**Perbedaan dengan Penelitian ini**
1	Rainer	2024	*On Real Analytic Functions on Closed Subanalytic Domains*.	Sama-sama mengkaji regularitas fungsi dalam geometri analitik riil serta berkaitan dengan struktur subanalitik/ semi-analitik.	Berfokus pada regularitas fungsi analitik pada domain subanalitik tertutup, tanpa membahas operator integral maupun preservasi struktur

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

					semi-analitik.
2	Belotto da Silva, Curmi, & Rond	2024	*On the Nash Points of Subanalytic Sets*	Sama-sama membahas objek subanalitik dalam geometri analitik riil.	Berfokus pada karakterisasi titik Nash pada himpunan subanalitik, bukan pada transformasi fungsi melalui operator integral.
3	Menegon & Jesus-Almeida	2023	*Topological Triviality in Families of Functions on Subanal*	Sama-sama mengkaji fungsi yang bergantung pada parameter dan struktur subanalitik.	Menitikberatkan pada trivialitas topologis keluarga fungsi, bukan pada preservasi

STATE ISLAMIC UNIVERSITY SUNAN KALIJAGA YOGYAKARTA

			ytic Sets and Complex Analytic Spaces		struktur semi-analitik melalui operator integral berparameter.
4	Susanti	2008	Ruang Fungsi Terbobot i $L^p(a,b;w$ dan Operator Integral yang Bekerja Padanya	Sama-sama mengkaji operator integral dan sifat-sifat fungsi hasil transformasi.	Berfokus pada operator integral pada ruang fungsi terboboti, bukan pada preservasi struktur semi-analitik.
5	Rokhayah	2010	Operator Integral dari Ruang	Sama-sama membahas operator integral dan	Berfokus pada konstruksi operator

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

			Banach Fungsi Berbobot	sifat-sifat kernel/operator.	integral pada ruang Banach berbobot, tanpa membahas fungsi semi-analitik.
6	Munadi	2007	Beberapa Jenis Operator yang Bekerja pada Ruang Fungsi Terintegral Henstock–Bochner	Sama-sama menggunakan teori operator pada ruang fungsi.	Tidak membahas operator integral berparameter maupun preservasi struktur semi-analitik.
7	Nurmahasasi	2013	Keterbatasan Operator	Sama-sama mengkaji operator	Berfokus pada keterbatas

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

			Integral Fraksional di Ruang Lebesgue	integral dan integrabilitas fungsi.	an operator integral fraksional pada ruang Lebesgue, bukan pada struktur semi-analitik.
8	Penelitian yang diusulkan	2026	Preservasi Struktur Semi-Analitik di Bawah Operator Integral Berparameter	Mengintegrasikan teori ukuran, integral Lebesgue, operator integral, dan geometri analitik riil untuk mengkaji preservasi struktur	

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

				semi-analitik. Menitikberatkan pada analisis keterukuran, integrabilitas, serta kondisi cukup yang menjamin preservasi struktur semi-analitik melalui operator integral berparameter.	

Berdasarkan penelitian-penelitian terdahulu, dapat disimpulkan bahwa kajian mengenai semi-analitik dan operator integral masih berkembang pada jalur yang relatif

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

terpisah. Penelitian pada bidang semi-analitik umumnya berfokus pada struktur geometri lokal, singularitas, dan regularitas domain, sedangkan penelitian operator integral lebih banyak membahas regularitas kernel, keterbatasan operator, dan sifat fungsi hasil transformasi. Hingga saat ini belum ditemukan penelitian yang secara khusus meneliti mengenai preservasi struktur semi-analitik pada fungsi yang ditransformasikan melalui operator integral berparameter. Oleh karena itu, penelitian ini diarahkan untuk mengisi celah tersebut dengan mengintegrasikan perspektif analisis riil, teori operator integral, dan geometri analitik riil dalam satu kerangka penelitian yang terpadu.

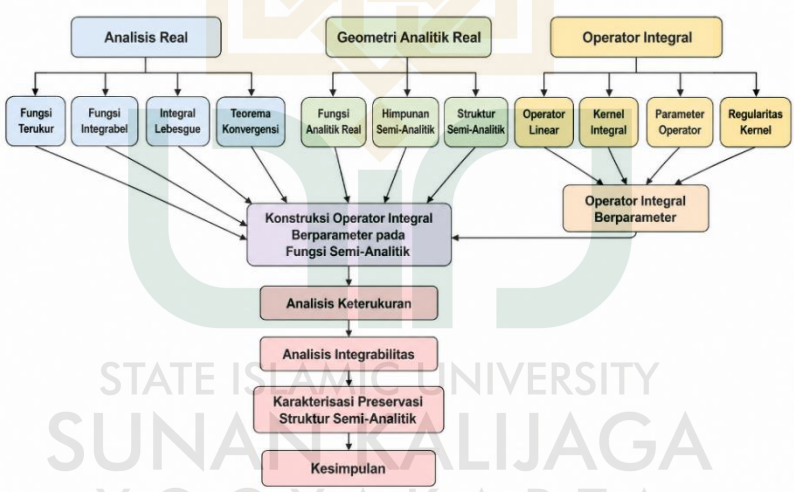
1.7. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian matematika murni dengan pendekatan teoretis melalui studi literatur. Penelitian dilakukan dengan mengkaji konsep-konsep dalam teori ukuran, integral Lebesgue, operator integral, dan geometri analitik riil sebagai landasan untuk menganalisis preservasi struktur semi-analitik di bawah operator integral berparameter.

Tahapan penelitian diawali dengan mengumpulkan dan mempelajari referensi yang relevan, kemudian menyusun landasan teori yang berkaitan dengan fungsi terukur, integral Lebesgue, fungsi semi-analitik, dan operator integral. Selanjutnya dilakukan konstruksi operator integral

berparameter beserta analisis terhadap keterukuran, integrabilitas, dan kondisi yang menjamin preservasi struktur semi-analitik pada fungsi hasil transformasi.

Analisis dilakukan secara deduktif melalui pembuktian matematis berdasarkan definisi, lema, proposisi, dan teorema yang relevan. Hasil analisis kemudian digunakan untuk menyusun kondisi preservasi struktur semi-analitik di bawah operator integral berparameter serta menarik kesimpulan sesuai dengan tujuan penelitian.



Gambar 1. Desain Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Untuk menyusun tugas akhir ini, sistematika penulisan yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. BAB 1 : PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, identifikasi masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. BAB 2 : DASAR TEORI

   Bab ini memuat teori-teori yang menjadi dasar penelitian, meliputi konsep fungsi terukur dan fungsi integrabel, integral Lebesgue, fungsi analitik riil, himpunan semi-analitik menurut pendekatan Łojasiewicz, operator linear, operator integral, serta beberapa hasil teoritis yang digunakan dalam pembuktian pada bab selanjutnya.

3. BAB 3 : KONSTRUKSI OPERATOR INTEGRAL BERPARAMETER

   Bab ini membahas konstruksi operator integral berparameter yang diterapkan pada fungsi semi-analitik. Pembahasan diawali dengan penetapan domain, ruang parameter, dan asumsi regularitas kernel. Selanjutnya dibahas representasi lokal fungsi semi-analitik, formulasi operator integral berparameter, serta analisis sifat dasar operator yang meliputi kesahihan (*well-definedness*) dan keterukuran sebagai landasan untuk menganalisis preservasi struktur semi-analitik pada bab berikutnya.

4. BAB 4 : PRESERVASI STRUKTUR SEMI-ANALITIK

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Bab ini memuat hasil penelitian dan pembahasan. Analisis diawali dengan pembuktian keterukuran dan integrabilitas fungsi hasil transformasi operator integral berparameter. Selanjutnya dianalisis hubungan antara regularitas kernel dan sifat fungsi hasil transformasi. Pembahasan kemudian dilanjutkan dengan analisis kondisi-kondisi yang menjamin preservasi struktur semi-analitik melalui representasi graf fungsi, pembuktian teorema utama, serta penerapan kondisi cukup yang diperoleh. Hasil yang diperoleh kemudian dibahas dalam perspektif analisis riil, teori operator integral, dan geometri analitik riil.

5. BAB 5 : PENUTUP

Bab ini memuat kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil penelitian serta saran untuk pengembangan penelitian lebih lanjut yang berkaitan dengan operator integral, fungsi semi-analitik, maupun struktur geometris yang lebih umum.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil studi literatur dan analisis mendalam yang telah dipaparkan pada bab-bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan yang menjawab seluruh rumusan masalah penelitian sebagai berikut:

1. Hubungan antara regularitas kernel dan sifat fungsi hasil transformasi ditunjukkan melalui pewarisan regularitas dari kernel kepada fungsi hasil transformasi melalui operator integral berparameter

$$(Tf)(x,p) = \int_Y K(x,y,p) f(y)\, d\mu_Y(y).$$

Kekontinuan fungsi hasil transformasi diperoleh melalui Teorema Konvergensi Terdominasi Lebesgue, sedangkan diferensiabilitas terhadap variabel keluaran dan parameter diperoleh dengan diferensiasi di bawah tanda integral di bawah kondisi dominasi yang sesuai. Lebih lanjut, apabila kernel memenuhi kondisi analitik lokal berupa estimasi terhadap seluruh turunan

$$|\partial_z^\alpha K(z,y) f(y)| \leq C_Q G_Q(y) \frac{\alpha!}{R_Q^{|\alpha|}},$$

untuk setiap kompak $Q \Subset U$, maka fungsi hasil transformasi memenuhi estimasi turunan analitik dan

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

merupakan fungsi analitik riil pada U. Dengan demikian, regularitas analitik kernel yang disertai kondisi dominasi yang sesuai memberikan syarat cukup bagi analitisitas fungsi hasil transformasi.

2. Keterukuran dan integrabilitas fungsi hasil transformasi diperoleh dari keterukuran kernel, keterukuran fungsi masukan, serta kondisi integrabilitas dan dominasi yang ditetapkan pada operator integral. Kondisi tersebut menjamin bahwa integral

$$(Tf)(x,p) = \int_Y K\,(x,y,p) f(y)\, d\mu_Y(y)$$

terdefinisi dengan baik untuk variabel keluaran dan parameter yang ditinjau. Selain itu, keterukuran Lebesgue gabungan fungsi integran memungkinkan diperolehnya keterukuran fungsi hasil transformasi, sedangkan dominasi oleh fungsi yang integrabel menjamin integrabilitasnya. Hasil ini menjadi dasar untuk menerapkan Teorema Konvergensi Terdominasi Lebesgue serta diferensiasi di bawah tanda integral pada analisis regularitas fungsi hasil transformasi.

3. Kondisi yang menjamin preservasi struktur semi-analitik diperoleh dengan menggabungkan representasi lokal fungsi semi-analitik dan syarat cukup analitisitas fungsi hasil transformasi. Berdasarkan dekomposisi hingga domain integrasi menjadi sel-sel semi-analitik, fungsi

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

masukan semi-analitik dapat direpresentasikan secara lokal oleh fungsi analitik pada setiap sel. Operator integral kemudian dapat dituliskan sebagai jumlah hingga kontribusi integral pada masing-masing sel. Dengan menerapkan syarat cukup pada analitisitas kernel dan kondisi dominasi yang sesuai, setiap kontribusi integral merupakan fungsi analitik riil. Karena jumlah kontribusi tersebut berhingga, fungsi hasil transformasi Tf juga merupakan fungsi analitik riil. Selanjutnya, dengan merepresentasikan graf Tf sebagai himpunan nol dari fungsi riil analitik

$$H(z,t) = t - (Tf)(z),$$

diperoleh bahwa graf Tf merupakan himpunan semi-analitik. Oleh karena itu, pada domain keluaran yang memenuhi asumsi semi-analitik yang ditetapkan, Tf merupakan fungsi semi-analitik. Dengan demikian, penelitian ini menghasilkan kondisi cukup yang menjamin bahwa operator integral berparameter mempertahankan struktur semi-analitik fungsi masukan. Kondisi tersebut mencakup keterukuran dan integrabilitas yang diperlukan, regularitas analitik kernel terhadap variabel keluaran dan parameter, kondisi dominasi terhadap turunan kernel, kekompakan domain integrasi, serta representasi lokal fungsi masukan semi-analitik.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

5.2. Saran

Berdasarkan hasil penelitian dan batasan yang telah ditetapkan, beberapa saran untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. Memperluas kelas domain dan kernel yang digunakan dalam penelitian, khususnya dengan mengkaji apakah kondisi cukup preservasi struktur semi-analitik masih dapat diperoleh pada domain integrasi yang tidak kompak atau pada kernel dengan tingkat regularitas yang lebih lemah.
2. Mengkaji pelemahan kondisi dominasi turunan kernel pada Teorema 4.2.3. Penelitian selanjutnya dapat mencari kondisi cukup yang lebih umum atau lebih lemah yang tetap menjamin pertukaran diferensiasi dan integrasi serta analitisitas fungsi hasil transformasi.
3. Mengembangkan preservasi ke kelas fungsi yang lebih umum, seperti fungsi subanalitik atau fungsi yang definabel dalam struktur o-minimal. Hal ini dapat memperluas kajian mengenai hubungan antara operator integral dan struktur geometris fungsi. Arah ini juga sejalan dengan batasan penelitian saat ini yang belum mencakup kelas-kelas tersebut.
4. Mengkaji operator integral dengan struktur yang lebih umum, misalnya dengan ruang domain dan ruang

parameter berdimensi lebih tinggi, sehingga dapat diketahui sejauh mana kondisi cukup yang diperoleh dalam penelitian ini dapat diterapkan pada kerangka yang lebih luas.

5. Mencari contoh dan kontra-contoh untuk menguji ketajaman kondisi cukup yang telah diperoleh. Kajian tersebut dapat membantu menentukan bagian-bagian asumsi yang benar-benar diperlukan dalam pembuktian dan bagian yang masih dapat diperlemah.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR PUSTAKA

Bierstone, E., & Milman, P. D. (1988). Semianalytic and Subanalytic Sets. *Mathématiques de L'Institut Des Hautes Scientifiques*, *67*(January), 5–42. https://doi.org/10.1007/BF02699126

Folland, G. B. (1999). *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications* (2nd ed.). John Wiley and Sons, INC.

Krantz, S. G., & Parks, H. R. (2002). *A Primer of Real Analytic Functions* (2nd ed.). Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8134-0

Kress, R. (2014). *Linear Integral Equations* (3th ed.). Springer New York, NY.

Lojasiewicz, S. (1965). *Ensembles Semi-Analytiques*. Institut des Hautes Études Scientifiques.

Menegon, A., & Jesus-Almeida, J. P. de. (2023). Topological Triviality in Families of Functions on Subanalytic Sets and Complex Analytic Spaces. *International Mathematics Research Notices*, *2023*(6), 4869–4886. https://doi.org/10.1093/imrn/rnac008

Munadi. (2007). *Beberapa Jenis Operator Yang Bekerja Pada Ruang Fungsi Terintegral Henstock-Bochner* [Tesis, Universitas Gadjah Mada]. https://etd.repository.ugm.ac.id/penelitian/detail/36103

Nurmahasasi, E. (2013). *Keterbatasan Operator Integral Fraksional di Ruang Lebesgue Pada Ruang Euclid Tak Homogen Dengan Menggunakan Sebarang Metrik* [Tesis, Universitas Airlangga]. https://repository.unair.ac.id/25049/

Rainer, A. (2024). On real analytic functions on closed subanalytic domains. *Archiv Der Mathematik*, *122*(April), 639–650. https://doi.org/10.1007/s00013-024-01983-1

STATE ISLAMIC UNIVERSITY SUNAN KALIJAGA YOGYAKARTA

Rokhayah, S. (2010). *Operator Integral Dari Ruang Banach Fungsi Berbobot* [Tesis, Universitas Gadjah Mada]. https://etd.repository.ugm.ac.id/home/detail_pencarian/48167

Royden, H. L., & Fitzpatrick, P. M. (2010). *Real Analysis* (4th ed.). Pearson.

Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis. In *Library of Congress*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-53877-8_17

Silva, A. B. Da, Curmi, O., & Rond, G. (2024). On The Nash Points of Subanalytic Sets. *Journal of Singularities*, *27*(March), 68–88. https://doi.org/10.5427/jsing.2024.27d

Susanti, E. (2008). *Ruang Fungsi Terboboti L (a, b): w) dan Operator Integral Yang Bekerja Padanya* [Tesis, Universitas Gadjah Mada]. https://etd.repository.ugm.ac.id/penelitian/detail/39070

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA